
STAR TREK: ROTTA VERSO LA LAUREA
Data stellare 20/03/2023. Appunti per il corso di

METODI ANALITICI E NUMERICI PER LE EDP

a cura di *Federico Angelo Mor*

Gli appunti della **parte analitica** sono quelli che ho preso a lezione, sistemati con colori, frecce, collegamenti (tramite le stelline, con al pedice indicate quante pagine in avanti (se +) o all'indietro (se -) andare a cercare il collegamento), commenti a matita, ecc.

Gli appunti della **parte numerica** non sono quelli presi in aula (essendo che le spiegazioni erano un po' caotiche) ma sono la loro rielaborazione, molto più chiara ed ordinata.

Se non riuscite a leggere qualche parte/parola, per via del mio corsivo a volte un po' spinto, scrivetemi tranquillamente qui https://t.me/Fede_Mor, mandandomi la foto della parte dubbia.

Mentre questi sono tutti (spero) gli acronimi utilizzati nella scrittura degli appunti. Quindi se trovate in giro qualche sigla a voi sconosciuta questo è il posto in cui andare a cercarla.

cc	condizioni al contorno
cdv/cdvar	cambio di variabili
ci	condizioni iniziali
coeff	coefficiente/i
eqz	equazione
fnz	funzione
hp	ipotesi
ker	nucleo
ker(qualcosa)	nucleo di/del qualcosa
pdC	problema di Cauchy
preh	prehilbertiano
prob	problema
pto	punto
sf	serie di Fourier
sh	spazio di Hilbert
sv	spazio vettoriale
slz	soluzione
succ	successione
tc	tale che
th	tesi
thm	teorema
\int	a volte integrale, altre integrabile

Infine, se questi appunti vi risulteranno in qualche modo utili e/o avvertirete un irrefrenabile, assillante, impellente desiderio di ringraziarmi, qui potrete offrirmi un caffè alle macchinette del poli (in realtà a quelle prendo solo il tè o il latte, ma caffè era l'opzione umanamente più conforme all'azione di offrire qualcosa): <https://www.paypal.com/paypalme/federicomor>

Buona fortuna (*~*)

INTRODUZIONE ALLE EDP

Motivazioni:

Per modellizzare problemi fisico-matematici o usanti EDO (eqz. diff. ordinarie) o loro sistemi.

Ma se sistemi con un numero finito di pdl o equaz. possono essere sistemi continui più complessi (fluidi, calore, ecc).
E le variabili da cui dipendono le funzioni incognite sono sempre più di una.

⇒ Si arriva alle EDP, nella forma

$$F(x, u(x), D^1 u, \dots, D^k u) = 0$$

Riviste / Forme EDP.

• Eqz della corda vibrante, di D'Alembert

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad u: \text{spostamento della corda}$$

può estendersi in più dimensioni (membrane, ecc) in

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u = c^2 \left(\sum_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right)$$

• Eqz di Poisson, nei campi gravitazionali / elettostatici

$$\Delta u = 0$$

• Eqz del calore, introdotta da Fourier

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \Delta u \quad u: \text{temperatura nel mezzo continuo}$$

• Altre: eqz di Navier-Stokes, Schrödinger, Maxwell.

comunque le EDP non hanno solo applicazioni fisiche, rimangono utili per approssimare la teoria

Ci sono anche un problema differenziale / probabilistico / modelli stocastici / ecc.

Classificazione delle EDP.

Ci sono più criteri.

(1) Ordine dell'eqz

non vedremo solo quelle in 1° e 2° in es. del 1°: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - f(x,u) = 0$

(2) Eqz scalari o sistemi di eqz.

funzioni pre- definite, termini noto

(3) Eqz lineari o non lineari.

Le lineari sono nella forma $Lu = f$

operatore lineare / incognita

(4) Tipo dell'eqz: ellittico, parabolico, iperbolico.

Elementi di complessità.

• Aumento e ciò fare con più variabili (come argomenti delle funzioni) o le proprietà del dominio diventa motivo di complessità.

|| Eqz tranquilli su domini continui diventano difficili.

• Approfondire e provare per questo occorre esplicitare ipotesi.

|| Rivederemo fisico vs trattabilità matematica.

fare storiche.
(A) ricerca di sol. esplicite (700 e 800).
Si utilizzano tutti i possibili: maple, notepad, ecc.
(trasformate, serie, ecc).

(B) ricerca di risultati analitici per sol. astratti (200 e 300).
simili tra di F, i, stabilita', lap sul dominio.

(C) ricerca di sol. dell'ambito numerico. Che si appoggia alla teoria precedente.

Problemi tipici e caratteristiche.
Casi come le sol. EDO trovano o sol. anche qui.
domenno esplicito delle condizioni al contorno, per
risultati anche.

EDO, la piu' easy: $u'(x) = 0 \Rightarrow u(x) = c \in \mathbb{R}$

EDP, la piu' easy: $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 0 \Rightarrow u(x,y) = f(y)$ qualunque

\Rightarrow Le sol. delle EDP sono determinate e univ. di
una funzione. Terminate condizioni iniziali oppure
di contorno.

Dato un problema differenziale (EDP + condizione I/c),
ci rimane chiedere:
una volta assegnati i dati ($=$) \forall dato f (dato)

- \exists una sol.?
- Tale sol. e' unica?!
- Tale sol. dipende continuamente dai dati?

(casi in cui stabile per piccole variazioni dei dati)

Diremo che un problema e' ben posto se ris-
ponde ai e tutte e tre le domande.

E' per rispondere lavoreremo sempre su spazi di
funzioni.

Vedremo molte teo., ma la piu' utile saranno quelle
di unita', giacche' permetteranno di dire che
se troviamo una sol. con un "metodo particolare",
cangue' la sol. e' unica esistente.

Scelta:

- Parte classica: eqz di Laplace
eqz di diffusione (calore)
eqz del trasporto (acqua)
eqz delle onde
- Proprietà generali delle EDP
- Parte moderna: analisi funzionale (completi)
formazioni deboli

ANALISI FUNZIONALE / SPAZI DI HILBERT

Vedi riassunti / fogli di studio.
Cioe' tutte le parti su sp, prod scalare e norme
per sol., e la parte su operatori e funzionali.
Tanto alle caratteristiche dei funzionali (lineari e
limitati / continui) e ai teo. di rappresentazione.

VERSO LE EDP

Richiamo sui differenziali (e tlv) in \mathbb{R}^n . Così \mathbb{R}^3 .
 Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ dominio reg. regolare e limitato. E sia
 $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, u \in C^1(\bar{\Omega})$. Allora vale che

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot u(x) dx = \int_{\partial\Omega} u(\sigma) \cdot n_e d\sigma$$

(normale normale uscente da Ω)

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

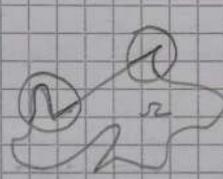
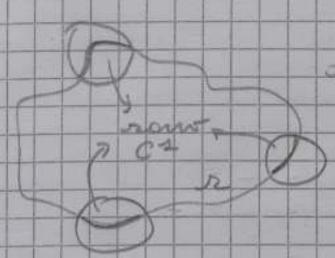
- Ω è detto dominio regolare se è un aperto connesso.
- Ω è detto dominio di classe C^1 se $\forall x \in \partial\Omega \exists B_r(x)$ ed \exists un sistema di coord. cartesiane (y', y'') centrato in x ed \exists una fun. $y'' = \varphi(y')$ definita da $\Delta := \mathcal{N}(0) \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \in C^1$ e t.c.:

$$\Omega \cap B_r(x) = \{ (y', \varphi(y')) : y' \in \Delta \}$$

cioè il bordo coincide col grafico della fun.

$$\Omega \cap B_r(x) = \{ (y', y'') : y'' > \varphi(y'), y' \in \Delta \}$$

cioè l'interno sta tutto da una parte del grafico



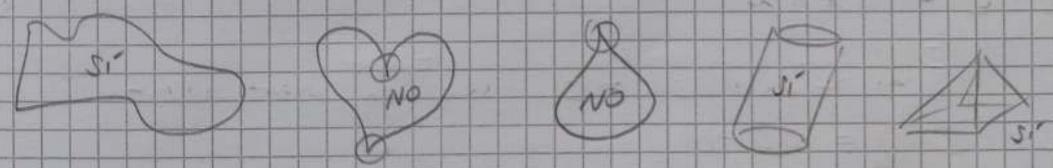
- Ω è detto dominio Lipschitziano se con. reg. ma con la fun. che sia Lip, cioè:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è Lip se $\exists k > 0: \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ si ha che

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq k \cdot |x_1 - x_2|$$

cioè è a rapp. incrementali sempre finite in \mathbb{R}

\Rightarrow con Ω Lip ammette sp. angolari, ma non cuspidi (perché sono le tangenti che non esiste e $\neq 0$)



Alm (stella dim, così \mathbb{R}^n).

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ dominio limitato e Lip e sia $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m, u \in C^1(\bar{\Omega})$. Allora vale che

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot u(x) dx = \int_{\partial\Omega} u(\sigma) \cdot n_e d\sigma$$

Due identità notevoli.

$$\nabla \cdot (f \underline{g}) = \nabla f \cdot \underline{g} + f \cdot \nabla \cdot \underline{g} \quad \left(\begin{array}{l} f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \in C^1 \\ \underline{g}: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \in C^1 \end{array} \right)$$

$$\nabla \cdot (f \nabla g) = \nabla f \cdot \nabla g + f \cdot \nabla \cdot \nabla g = \Delta g = \sum_i \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}$$

} Laplaciano

$(f, g: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \in C^1)$

Una le esplicitano per cui sono delle identità.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla \cdot (f \nabla g) dx = \int_{\mathbb{R}^n} [\nabla f \cdot \nabla g + f \cdot \Delta g] dx$$

$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla \cdot (f \nabla g) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{(\nabla f \cdot \nabla g)}_{:= \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i}} + \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \Delta g dx$
derivata normale uscente

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f \frac{\partial g}{\partial x_i} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla f \cdot \nabla g dx + \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \Delta g dx \quad \text{1a IDG}$$

$(f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \in C^1(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R}))$

Scriviamo invertendo f e g , e sottraendo.

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} (f \Delta g - g \Delta f) dx = \int_{\mathbb{R}^n} (f \frac{\partial g}{\partial x_i} - g \frac{\partial f}{\partial x_i}) dx \quad \text{2a IDG}$$

$(f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \in C^1(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R}))$

Operatore di Laplace, eqz di Laplace/Poisson e sua interpretazione.

(1) Elettrostatica. Un $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$ di Gauss dell' elett. Per una distribuzione di carica continua nello spazio.

Sia \mathbb{E} il campo elett. allora $\nabla \cdot \mathbf{E}$ è conservativo

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} e d\sigma = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla \cdot \mathbf{E} dx = 4\pi \int_{\mathbb{R}^n} \rho dx = \int_{\mathbb{R}^n} \rho dx$$

(1a IDG) = derivata di carica

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\nabla \cdot \mathbf{E} - 4\pi \rho) dx = 0 \quad \text{tra}$$

\Rightarrow deve essere $= 0$ e integrabile

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \rho$$

\mathbf{E} è un campo conservativo $\Rightarrow \exists u: \nabla u = \mathbf{E}$, con u pot. elett.

$$\nabla \cdot (\nabla u) = 4\pi \rho$$

$$\Rightarrow \Delta u = 4\pi \rho$$

Egz di Poisson per il campo elett.

termine di sorgente: nelle regioni prive di carica $\rho = 0$ quindi

Egz di Laplace

$$\Delta u = 0$$

Def. Una funz $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$: $\Delta u = 0$ è detta armonica in \mathbb{R}^n .

(2) Campo gravitazionale. Come sopra ma con la in regione (anche campo attrattivo).

$$\Delta u = -4\pi \rho$$

ρ densità di massa

\Rightarrow In generale:

Egz di Poisson:

$$\Delta u = f$$

Egz di Laplace:

$$\Delta u = 0$$

(3) Nota su un fluido incompressibile. Sia v il campo delle velocità, allora

$\Rightarrow \nabla \cdot v = 0$. Suppongo che il moto sia non vorticoso

$\Rightarrow \nabla \times v = 0$. Ma grazie (dall'AN) il campo v è almeno localmente conservativo.

Ciò \exists un pot. di velocità $\varphi: v = \nabla \varphi$.

$$\Rightarrow \nabla \cdot v = \nabla \cdot (\nabla \varphi) = \Delta \varphi = 0$$

il potenziale di velocità φ su un fluido incompressibile in un contorno non vorticoso Ω una funzione armonica

(4) Caso stazionario di altre EDP che nascono similmente. Come stato eq. di diffusione del calore:

Sia u la temperatura nel mezzo continuo. Ω eq. $\partial \Omega$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D \cdot \Delta u = f$$

(coeff > 0 di diffusione)
termine di sorgente

Se il Ω ha rapporto l'eq. di allora la temp. non cambia nel tempo (magari v nello spazio)

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \right) \quad -D \cdot \Delta u = f$$

In condizione di sorgente di calore $f=0$

$$\Rightarrow \Delta u = 0$$

(4.1) Caso stazionario della membrana ($\in \mathbb{R}^2$) elastica vibrante. Sia $z = u(x, y)$ il pot. della membrana.

è utile come esempio per capire come sono fatti i problemi della fisica armonica (come membrana in equilibrio elastico)

\Rightarrow non possono avere max/min $\in \Omega$, solo sulle al contorno

Superficie matematica stato eq. di Laplace (in \mathbb{R}^2 o \mathbb{C}).

Suppongo $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto, $f(z) \in H(\Omega)$. Allora volevo dire

$$f(z) = f(x+iy) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$$

$f \in H(\Omega) \Leftrightarrow u, v \in C^1(\Omega)$ e realizzanti $\forall z \in \Omega$

le eq. di CR:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{in realta'} \\ u, v \in C^1 \end{array}$$

se da queste calcoliamo

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \} = \text{regole} \\ \frac{\partial}{\partial y} \} = \end{cases}$$

allo stesso modo ne inventate regole

$$\Rightarrow \Delta v = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{sono = perché} \\ \text{CR e loro} \\ \text{di Schwarz} \end{array}$$

$$\Rightarrow \Delta u = 0$$

le Re e Im di funzioni armoniche sono armoniche

Es. (E1) $f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y$

$$\Rightarrow \Delta u = \Delta v = 0 \quad \begin{array}{l} u(x, y) \\ v(x, y) \end{array}$$

(E2) $f(z) = z^n = (x+iy)^n \in H(\mathbb{C})$

$$\begin{cases} u_n := \text{Re}[(x+iy)^n] \\ v_n := \text{Im}[(x+iy)^n] \end{cases}$$

sono armoniche in \mathbb{R}^2

$(\cos = z) \Rightarrow u_3 = \text{Re}[(x+iy)^3] = \dots = x^3 - 3xy^2$ e $u_3 = 0$

Le funzioni u_n e v_n sono dette armoniche fondamentali nel piano.

In coordinata polare diventano:

$$f(z) = z^n = (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$$

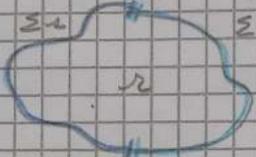
$$u_n = \rho^n \cos(n\theta)$$

$$v_n = \rho^n \sin(n\theta)$$

Problemi differenziali che si risolvono per il Laplace in \mathbb{R}^2 .
 Ciascun problema ha un tipo di eq. $\Delta u = f$ in \mathbb{R}^2 .

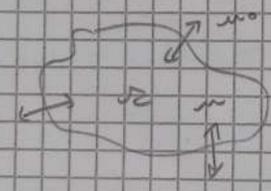
Tipi di condizioni al contorno (cc):

- condiz. di Dirichlet $u = g$ su $\partial\Omega$ dove il comportamento sul bordo
 - condiz. di Neumann $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ su $\partial\Omega$ definisce il valore della derivata normale in ogni punto di $\partial\Omega$
- E_0, u : temperatura,
 $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ vuol dire che il corpo è isolato, non c'è scambio di calore con l'esterno di Ω .

- condiz. mista
- 

$u = g$ su Γ_1
 $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ su Γ_2

- condiz. di Robin
- $\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g$ su $\partial\Omega$,
 con $\alpha > 0$



E_0, u : temperatura,
 u_0 : temp. ambiente esterno

$u_0 - u > 0 \Rightarrow$ calore entra, $u \uparrow$
 ($u_0 = u_0$) c'è flusso di calore verso Ω

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial n} = \alpha(u_0 - u) > 0$

$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = \alpha u_0$

Da cui parliamo di problemi:

- | | |
|---|---|
| prob. di Dirichlet
$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$ | prob. di Neumann
$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$ |
|---|---|
- ecc.

Comunque, in \mathbb{R}^2 di \exists sono compatibili, non più utili e quelli di "wicket", per trovare "la" sol.

Teor. (soli wicket).

Una Ω dominio limitato e Lap. allora nella classe di funzioni $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ la sol. di un problema di

- Dirichlet / misto / Robin e' unica
- Neumann e' unica e new di una costante arbitraria

anche in effetti, con Neumann c'è $\frac{\partial u}{\partial n}$, l'ovvero con la derivata.

Dim. siano $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, due sol. dello stesso prob. (uno di g).

$\Rightarrow u := u_1 - u_2$ soddisfa:

- l'eq: $\Delta u = \Delta u_1 - \Delta u_2 = f - f = 0$
- la cc: pari a 0 (per differenza)

\Rightarrow non è necessario mostrare che $u=0$.

Dalla 1^a IDG, per la prop. di riduzione le lip, segue

$$\int_{\Omega} \underbrace{\Delta u}_{=0} dx + \int_{\Omega} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial n}}_{=0} \cdot \underbrace{\frac{\partial u}{\partial n}}_{=0} dx = \int_{\partial \Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$$

$$0 = 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{- Dirichlet: } u=0 \text{ su } \partial \Omega \\ \text{- Neumann: } \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ su } \partial \Omega \\ \text{- misto: } \text{ovvero} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 dx = 0 \Rightarrow \text{(per le caratteristiche di } \Omega \text{) che } \nabla u = 0$$

$$\Rightarrow u = \text{cost in } \Omega$$

- Dirichlet: $u=0$
 - misto: $u=0$
 - Neumann: niente di più, solo $u = \text{cost}$
- $$\left. \begin{array}{l} u=0 \\ \Rightarrow u_1 = u_2 \\ u = c \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow u_1 = u_2 + c \end{array} \right\}$$

□

Pro. (02) La sol. del prob. di Neumann non può esistere per qualunque scelta di f e g $\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = f \text{ in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ su } \partial \Omega \end{array} \right.$

Trasformo la 1^a IDG con le funzioni u e $v=1$.

$$\int_{\Omega} 1 \cdot \underbrace{\Delta u}_{=f} dx + \int_{\Omega} \underbrace{\nabla u \cdot \nabla 1}_{=0} dx = \int_{\partial \Omega} 1 \cdot \underbrace{\frac{\partial u}{\partial n}}_{=g} d\sigma$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\partial \Omega} g(\sigma) d\sigma}$$

che è nota come condizione di compatibilità.

È CNEC sul tenere note f e sul dato al bordo g affinché possa \exists una sol. u

pensando al colere in dove c'è un centro bilanciato tra le forze di colere e i flussi esterni

Problema di Dirichlet per l'eq. di Laplace sul cerchio (in \mathbb{R}^2).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Delta u = 0 \quad \text{per } x^2 + y^2 < 1 \\ u(x, y) = f(x, y) \quad \text{per } x^2 + y^2 = 1 \end{array} \right.$$

Trasformo in coordinate polari, $u = u(\rho, \theta)$. Col cambio di variabili $\left\{ \begin{array}{l} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{array} \right.$ so ricorro al Δu in polari:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad \text{per } 0 \leq \rho \leq 1 \\ u(\rho, \theta) = f(\theta) \quad \text{per } \rho = 1, \theta \in [0, 2\pi] \end{array} \right.$$

(ricorro sul bordo del cerchio)

Usiamo il metodo di separazione delle variabili.

Considero r(t) e variabili separate, cioè

$$u(p, \theta) = R(p) \cdot \Phi(\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial p^2} + \frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{1}{p^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \text{ diventa}$$

$$R''(p) \Phi(\theta) + \frac{1}{p} R'(p) \Phi(\theta) + \frac{1}{p^2} R(p) \Phi''(\theta) = 0$$

$$\left(\frac{p^2}{\Phi(\theta) R(p)} \right) \left\{ \begin{aligned} p^2 \frac{R''(p)}{R(p)} + p \frac{R'(p)}{R(p)} &= - \frac{\Phi''(\theta)}{\Phi(\theta)} \end{aligned} \right.$$

e due valori di λ e $\lambda = 0$, ma allora $\lambda \in \mathbb{R}$: $1^{\circ} m = 2^{\circ} m = \lambda$ $\neq 0$

$$- 2^{\circ} m = \lambda \Rightarrow \Phi''(\theta) + \lambda \Phi(\theta) = 0$$

$$- 1^{\circ} m = \lambda \Rightarrow p^2 R''(p) + p R'(p) = \lambda R(p)$$

λ è una costante ma è negativa

$$(2^{\circ} m) \Phi''(\theta) + \lambda \Phi(\theta) = 0$$

La r(t) $\Phi(\theta)$ è reale sia 2π -periodica affinché in una rotazione sul cerchio

\Rightarrow del cos e sin (tempo per quella forma di Φ)
e intera il cos tempo

$$\lambda > 0 \Rightarrow \Phi(\theta) = \cos(\sqrt{\lambda}\theta), \sin(\sqrt{\lambda}\theta), 1$$

Definiamo quindi

$$\sqrt{\lambda} = n = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow \lambda = n^2$$

$$(1^{\circ} m) p^2 R''(p) + p R'(p) = \lambda R(p) = n^2 R(p)$$

È una EDO del 2° ordine, di tipo Euler.

La r(t) è quindi nelle forme $R(p) = p^\alpha$ con α inc.

$$p^2 (\alpha(\alpha-1) p^{\alpha-2}) + p (\alpha p^{\alpha-1}) = n^2 p^\alpha$$

$$\alpha(\alpha-1) + \alpha = n^2$$

$$\alpha^2 = n^2 \Rightarrow \alpha = \begin{cases} +n, & \text{acc} \\ -n, & \text{non acc} \end{cases} \Rightarrow R(p) = p^n$$

$$\Rightarrow R(p) = \frac{1}{p^m} \quad \left. \begin{array}{l} \text{se } \alpha = +\infty \\ \text{per } p \rightarrow 0 \end{array} \right\}$$

Quindi, avendo le r(t):

$$\begin{aligned} \Phi(\theta) &= \cos(n\theta), \sin(n\theta), 1 \\ R(p) &= p^n, p^{-n}, 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u_n(p, \theta) = p^n \cos(n\theta), p^{-n} \sin(n\theta), 1$$

cerco le armoniche forzate che nel tempo

Idea: ogni combinazione lineare delle un come arco

\Rightarrow Cerchiamo dei coeff per cui la funzione

$$u(p, \theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} p^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta)$$

risolverebbe anche la cc e sia quindi r(t) del problema.

Ma in quella forma è difficile, perché sul bordo

$$u(\rho=r, \theta) = a_0 + \sum u_n r^n(\theta) = f(\theta) ?? \text{ difficile.}$$

⇒ Idea finale: cercheremo $u(\rho, \theta)$ in forma di serie di Fourier, che risolve EDP + CC.

Staviamo cercando la sol. nella forma

$$u(\rho, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \rho^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

Sia $f(\theta)$ il dato al bordo. Sviluppo in serie di Fourier (e di)

$$f(\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta$$

* è analogo anche
 $\int_0^{2\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta$
 (per β_n)

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta$$

Vorremo che valga $f(\theta) = u(\rho=r, \theta)$, quindi

$$f(\theta) = u(\rho, \theta)|_{\rho=r} = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) =$$

$$= \underbrace{a_0}_{\alpha_0/2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{(r^n a_n)}_{a_n \Rightarrow a_n = \frac{\alpha_n}{r^n}} \cos n\theta + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{(r^n b_n)}_{b_n \Rightarrow b_n = \frac{\beta_n}{r^n}} \sin n\theta$$

$$\Rightarrow u(\rho, \theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n (a_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta)$$

non sono più incognite ⇐ con i coeff della serie di Fourier di $f(\theta)$
 e per $\rho=r$ in effetti esse
 uguale a $f(\theta)$

Questa è una candidata sol. al problema di Dirichlet.

ora si tratta la parte in cui si muove con i calcoli. Sembra allora le teorie per giustificare il risultato di attenzione

Parentesi (serie di funzioni)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b) := \mathcal{R}$$

• Criterio di continuità.

Se le $f_n \in C^0(\mathcal{R})$ e la convergenza è uniforme allora \Rightarrow anche $f \in C^0(\mathcal{R})$, cioè è continua.

• Criterio di derivabilità.

Se le $f_n \in C^1(\mathcal{R})$ e la serie $\sum f_n'$ converge unif. (e qualcosa) e la serie $\sum f_n$ converge (anche solo puntualmente) a f allora \Rightarrow $f \in C^1(\mathcal{R})$ e $\sum f_n' = f' = (\sum f_n)'$

cioè possiamo derivare termine a termine

• Criterio di Weierstrass (per la convergenza totale).

Si dice che $\sum f_n$ converge totalmente e f in \mathcal{R} se

$$\exists \{a_n\} \subseteq \mathbb{R} : |f_n(x)| \leq a_n \quad \forall n \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

$\sum a_n$ converge

vale che conv. totale \Rightarrow conv. uniforme, assoluta e puntuale

Trasformare alla $u(r, \theta)$ 2) cioè è cercare una serie numerica $\sum a_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta$ la usano col tlm (criterio)

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta)$$

Mettiamoci in qualsiasi cerchio $B(r)$ con $r < R$.
 Se $r = \delta < R$ e $\theta \in (0, 2\pi)$ allora

$$\left| \left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) \right| \leq \left(\frac{\delta}{R}\right)^n (|a_n| + |\beta_n|)$$

Facciamo scelti tali che $r = \delta < R \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{\delta}{R} = \rho < 1$
 Quindi: $0 < \delta/R < 1$
 $|a_n| = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta \leq \frac{1}{\pi} \|f\|_{L^1(0, 2\pi)}$
 $|\beta_n| = \dots \leq \frac{1}{\pi} \|f\|_{L^1(0, 2\pi)}$

se $f \in L^1(0, 2\pi)$ allora $|a_n| + |\beta_n| \leq c$ tm e primitivi

$$\Rightarrow |u(r, \theta)| = \dots \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\delta}{R}\right)^n c \text{ che converge}$$

C'è la serie $\sum a_n$ del criterio di Weierstrass, non dipende da r o θ

\Rightarrow La serie che definisce u converge totalmente in $B(r)$ $\forall \delta < R$ \Rightarrow anche unif

\Rightarrow Dal tlm di continuità sulla serie vale che (per il fatto che \sin/\cos sono C^∞) allora anche (anche per la convergenza) $u \in C^\infty(B(r)) \forall \delta < R$.

\Rightarrow Per continuità $u \in C^0(B(r))$.
non uniformi $\delta \rightarrow R$ la "somma della serie" del tlm sulla continuità delle serie

Riguardo alle derivate:

$$\frac{\partial}{\partial r} u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} \frac{1}{r^n} (a_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{r} \left(\frac{r}{R}\right)^{n-1} (a_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta)$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial r} u(r, \theta) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{r} \left(\frac{\delta}{R}\right)^{n-1} (|a_n| + |\beta_n|) \leq \sum_{n=1}^{\infty} n \rho^{n-1} \cdot c < +\infty, \text{ converge}$$

\Rightarrow La serie delle derivate (le ∂ che le definisce) converge totalmente in ogni $B(r)$, $\delta < R$, per ogni ordine.

$\Rightarrow u \in C^\infty(B(r))$, $\delta < R$

\Rightarrow Per continuità $u \in C^0(B(r))$.
delle \sin e \cos che definiscono la serie (costo via per continuità)

La serie u continua e C^∞ con la regola L^1 che $f \in L^1(0, 2\pi)$ che è una L^1 molto debole. La serie dunque si può derivare termine a termine ed ottenere con un di più come se per \sin e \cos non erano che loro le serie.

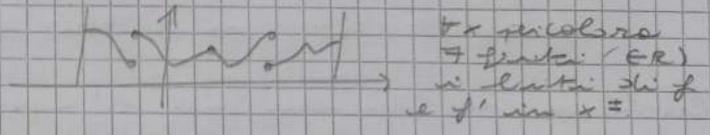
Se $f \in L^1(0, 2\pi)$ allora $(|a_n| + |b_n|) \in c$ km.
 Sotto quali lip su f si ha che

$$\sum (|a_n| + |b_n|) \text{ converge?}$$

Se ad esempio allora la serie di Fourier $u(r, \theta)$ convergibile tot in $B(r_0)$, e quindi $u \in C^0(B(r_0))$.

Per le lip per cui vale la richiesta \exists il:

- Criterio di convergenza totale per serie di Fourier.
 f "regolare e tratti" voleno dire che:



Sia $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

- (1) $f \in C^0([0, 2\pi])$
- (2) $f(0) = f(2\pi)$, cioè e' 2π -periodica
- (3) f e' regolare e tratti in $[0, 2\pi]$

allora \Rightarrow la serie di Fourier di f converge totalmente, cioè

$$\sum (|a_n| + |b_n|) \text{ converge}$$

Sotto queste lip (del criterio) la $u(r, \theta)$ e'

- $C^\infty(B(r_0))$ e $u = 0$ in $\partial B(r_0)$
- $C^0(B(r_0))$ e $u = f$ su $\partial B(r_0)$

Ma quindi sono richieste lip forti su f .

Vediamo ora il caso in cui $f \in L^2(0, 2\pi)$ (che implica $f \in L^1(0, 2\pi)$ anche). In questo caso

\Rightarrow e' ancora vero che $u \in C^\infty(B(r_0))$ e $u = 0$ in $B(r_0)$.

Ma in che senso e' esatto il dato al bordo?

$$f(\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

$$\|f\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 = \pi \left[\frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_n (a_n^2 + b_n^2) \right]$$

$$u(r, \theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

Sia $\rho = r/r_0$. Calcoliamo:

$$f(\theta) - u(\rho, \theta) = \sum_n \left[1 - \left(\frac{\rho}{r_0}\right)^n \right] (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

$$\int_0^{2\pi} |f(\theta) - u(\rho, \theta)|^2 d\theta = \|f - u\|_{L^2}^2 = \sum_n \left[1 - \left(\frac{\rho}{r_0}\right)^n \right]^2 \pi (a_n^2 + b_n^2) \leq \sum_n (a_n^2 + b_n^2) \text{ che converge}$$

$$\Rightarrow \lim_{\rho \rightarrow r_0^-} \int_0^{2\pi} |f(\theta) - u(\rho, \theta)|^2 d\theta = \sum_n \lim_{\rho \rightarrow r_0^-} \left[1 - \left(\frac{\rho}{r_0}\right)^n \right]^2 \pi (a_n^2 + b_n^2) = 0$$

Anziché se $f \in L^2(0, 2\pi]$ allora in senso il lato di sinistra
 (la cc) in senso L^2 .

Caso: $\lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |f(\theta) - u(p, \theta)|^2 d\theta = 0$
 $(\Rightarrow) \|f - u\|_{L^2} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$

La cc è esatta solo in senso L^2 (case in senso S),
 quindi non più puntualmente.
 Mentre davanti (in r) cioè, di la sta sempre bene

Problema di Neumann (per l'eqz di Laplace) sul cerchio.

prob di Neumann $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{in } r = B(r_0) \\ \frac{\partial u}{\partial n} = f \quad \text{in } \partial r = \partial B(r_0) \end{array} \right.$

Cerchiamo una $u(p, \theta)$ nella forma

$$u(p, \theta) = a_0 + \sum \frac{\rho^n}{n} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

perché è la forma di alcuni vti in grado di
 soddisfare l'EDP $\Delta u = 0$.
 Determiniamo i coeff a_n e b_n applicando nella cc.

In conti globali:

$$\left(\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \rho}(p, \theta) = f(\theta) \quad \text{calcolata per } \rho=r$$

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = 0 + \sum \frac{\rho^{n-1}}{n} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) = f(\theta)$$

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum \frac{a_n}{n} \cos n\theta + \frac{b_n}{n} \sin n\theta$$

$(a_0 = 0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta \Rightarrow$ l' \int di f su ∂r deve essere $= 0$, ed essere in effetti nelle condizioni di compatibilità)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial n} = f \\ \frac{\partial u}{\partial n} = f \end{array} \right. \quad \int_{\partial r} f = \int_{\partial r} f, \quad \text{per } f=0 \text{ (} \frac{\partial u}{\partial n}=0 \text{)} \Rightarrow \text{segue } \int_{\partial r} f = 0$$

Dal confronto:

$$a_n = \frac{a_n}{n r^{n-1}}, \quad b_n = \frac{b_n}{n r^{n-1}}$$

$$\Rightarrow u(p, \theta) = a_0 + \sum \frac{\rho^n}{n r^{n-1}} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

questa costante arbitraria resta indeterminata (come dicevamo al tbn di $!$)
 coeff di Fourier delle $f(\theta)$

$$\Rightarrow u(p, \theta) = C + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{r} \right)^n \frac{r}{n} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

Che è la condizione sta del problema.
 Per quanto riguarda la convergenza più no circle
 meglio, grazie all' $1/n$.

Se $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ e' tale che

(1) $C^0([0, 2\pi])$

(2) $f(0) = f(2\pi)$

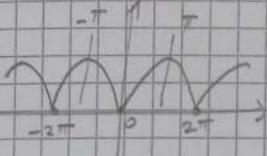
(3) e' regolare e tratti in $[0, 2\pi]$

Allora \Rightarrow la sol $u \in C^0(\mathbb{R}) \cap C^2(\bar{D})$, con $D = B_r(0)$, e la CC e' soddisfatta in modo puntuale: $\frac{\partial u}{\partial \rho} (= f) \in C^0(\partial D)$

Es. (E1) $\begin{cases} \Delta u = 0 & 0 \leq \rho < 3, \theta \in [0, 2\pi] \\ u(\rho, \theta) = 0 & \rho = 3, \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$

Problema di Dirichlet \Rightarrow la sol u ass' la forma

$$u = u(\rho, \theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_m \left(\frac{\rho}{r}\right)^m (a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta) \quad | \quad r=3$$



calcoliamo gli a_m e b_m mediante la f(0) periodica su $[-\pi, \pi] \Rightarrow$ e' pari e $b_m = 0$

$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos(m\theta) d\theta =$

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (2\pi - \theta^2) d\theta =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\theta^2}{2} 2\pi - \frac{\theta^3}{3} \right]_0^{\pi} = \dots = \frac{4}{3} \pi^2$$

$$= \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \frac{(2\pi - \theta)^2 \cos m\theta}{m} d\theta - \int_0^{\pi} \frac{\sin m\theta (2\pi - 2\theta)}{m} d\theta \right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{\cos m\theta (2\pi - 2\theta)}{m^2} - \int \frac{\cos m\theta (-2)}{m^2} d\theta \right\}_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left\{ (0 + \pi \cdot (-1)) \frac{-2}{m^2} \right\} = \frac{-4}{m^2}$$

$$\Rightarrow f(\theta) = \frac{2}{3} \pi^2 + \sum_m \left(\frac{-4}{m^2}\right) \cos m\theta$$

$$\Rightarrow u(\rho, \theta) = \frac{2}{3} \pi^2 + \sum_m \left(\frac{\rho}{3}\right)^m \left(\frac{-4}{m^2}\right) \cos m\theta$$

(E2) $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } x^2 + y^2 \leq 4 \\ u(x, y) = x^2 y & \text{su } x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

Convertiamo in polari

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u = \rho^3 \cos^2 \theta \sin \theta = 8 \cos^2 \theta \sin \theta \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq \rho \leq 2, \theta \in [0, 2\pi] \\ \rho = 2, \theta \in [0, 2\pi] \end{matrix}$$

Cerchiamo la serie di Fourier di f . Ma per la forma di f basta metterci con le 10 trigonometriche.

$$f(\theta) = 8 \cos^2 \theta \sin \theta = 8 \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) \sin \theta =$$

$$= 4 \sin \theta + 4 \cos(2\theta) \sin \theta = \quad \alpha = \theta, \beta = 2\theta$$

$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$

$$= 4 \sin \theta + 2 \sin(3\theta) + 2 \sin(-\theta) =$$

$$= \underbrace{2}_{\beta_2} \sin \theta + \underbrace{2}_{\beta_3} \sin(3\theta)$$

$$\Rightarrow u(p, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_n \left(\frac{\rho}{R}\right)^n (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) =$$

$$= \left(\frac{\rho}{2}\right)^1 \beta_1 \sin(\theta) + \left(\frac{\rho}{2}\right)^3 \beta_3 \sin(3\theta) =$$

$$= \rho \sin \theta + \frac{\rho^3}{4} \sin 3\theta$$

Lo possiamo ricomporre in caso di contorno:

$$\rho \sin \theta = \rho^2 \sin 2\theta \rightarrow y = \text{Im}[(x+iy)^2]$$

$$\rho^3 \sin 3\theta \rightarrow \text{Im}[(x+iy)^3] = \dots = 3x^2y - y^3$$

$$\Rightarrow u(x, y) = y + \frac{1}{4} (3x^2y - y^3)$$

(E3) $\begin{cases} u(p, \theta) = 0 & \text{per } 0 \leq \rho < 3, 0 < \theta < \pi \\ \frac{\partial u}{\partial n}(p, \theta) = f(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{per } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ -1 & \text{per } \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \end{cases} \end{cases}$ $\rho = 3 = R$

Problema di Neumann.

osserva che nella condizione di compatibilità, $\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta = 0$

Calcoliamo i coeff di Fourier di $f(\theta)$.

$\alpha_n = 0$ bn perché f è dispari

$$-\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(n\theta) d\theta =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\cos n\theta}{n} \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{2}{n\pi} (1 - \cos n\pi)$$

La rta era nella forma

$$u(p, \theta) = C + \sum_n \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{b}{n} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) =$$

$$= C + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{3}\right)^n \frac{3}{n} \left(\frac{2}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \sin n\theta \right)$$

Alcune commenti sui due problemi visti.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \rho < R \\ u = f & \text{in } \rho = R \end{cases}$$

avremo trovato la soluzione rta:

$$u(p, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_n \left(\frac{\rho}{R}\right)^n (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta)$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta$$

Se calcoliamo $u(p, \theta)$ per $\rho=0$ avanza

$$u(\rho=0, \theta) = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta$$

\rightarrow il valore della rta nel centro del cerchio è uguale alla media integrale del dato al bordo.

ha senso, come all'equipotenziale delle retilinee in equilibrio.



per il centro c'è una media di quel che accade sul bordo

è la $u(p, \theta)$

vale su c

Manipoliamo la forma della $u(\rho, \theta)$ per arrivare a una sua rappresentazione di tipo (forma integrale).

Perché in quella forma vengono più facili alcune proprietà (sul bordo in particolare).

Scriviamo $u(\rho, \theta)$ specificando che sono a_n e b_n
 \Rightarrow arriviamo a una Σ di 1 (che scriveremo).

$$u(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) d\alpha + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \left\{ \cos n\theta \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos n\alpha d\alpha + \sin n\theta \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \sin n\alpha d\alpha \right\} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \left\{ \cos n\theta \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos n\alpha d\alpha + \sin n\theta \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \sin n\alpha d\alpha \right\} = \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cdot h(\rho, \theta - \alpha) d\alpha, \text{ dove}$$

$$h(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \cos n\theta =$$

$$\operatorname{Re} \left[\left(\frac{\rho}{r}\right)^n e^{in\theta} \right] = \operatorname{Re} \left[\left(\frac{\rho}{r} e^{i\theta}\right)^n \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{r} e^{i\theta}\right)^n \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{r} e^{i\theta}\right)^n - 1 \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{1 - \rho/r e^{i\theta}} \right] \quad \text{serie geometrica}$$

$$\text{Dati: } z = \rho e^{i\theta} \Rightarrow \operatorname{Re} \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{1 - \frac{z}{r}} \right]$$

la fraz $\frac{1}{1 - z/r}$ è olomorfa, $\in \mathbb{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$

\Rightarrow h o o, perché Re di una f olomorfa, è armonica all'interno del cerchio

$$h(\rho, \theta) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[-\frac{1}{2} + \frac{r}{r - \rho \cos \theta - i \rho \sin \theta} \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[-\frac{1}{2} + \frac{r}{(r - \rho \cos \theta)^2 + (\rho \sin \theta)^2} \cdot (r - \rho \cos \theta + i \rho \sin \theta) \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{2} + \frac{r(r - \rho \cos \theta)}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \theta} \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{-r^2 - \rho^2 + 2r\rho \cos \theta + 2r^2 - 2r\rho \cos \theta}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \theta} \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{r^2 - \rho^2}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \theta} \right] = h(\rho, \theta)$$

È detta kernel di Poisson sul cerchio. Dunque:

$$u(\rho, \theta) = \int_0^{2\pi} h(\rho, \theta - \alpha) f(\alpha) d\alpha =$$

$$= \frac{r^2 - \rho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\alpha)}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\theta - \alpha)} d\alpha$$

è una formula conosciuta per la parte armonica
 ma sul int del disco unitario.

Vogliamo controllare il passaggio \star . Per es. è littor
re e conv. uniforme.

Letto lo lip su f che garantisce la convergenza della serie

$$\sum (|a_n| + |b_n|)$$

(che erano $f \in C^0$, $f(0) = f(2\pi)$, f regolare e tratti) allora
 \Rightarrow la serie $\sum e^{in}$ è la serie

è la formula risolvente per u e v

E. (E1) $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u = f = 1 \end{cases}$ su D , dove con $f=1$

$$u = 1 = \int_0^{2\pi} h(\rho, 0) d\theta = \int_0^{2\pi} h(\rho, \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} h(\rho, \theta) d\theta = 1$$

La rta e $u=1 \Rightarrow 1 = \int_0^{2\pi} h(\rho, 0) d\theta$

che è una proprietà che riprenderemo.

\Rightarrow il $\text{he}(R_{\rho})$ ha $\int_{\partial R} = 1$

Campio:

$$r^2 - \rho^2 > 0 \text{ per } \rho < r$$

$$r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\theta - \varphi) \geq r^2 + \rho^2 - 2r\rho = (r - \rho)^2 > 0 \text{ per } \rho < r$$

\Rightarrow il $\text{he}(R_{\rho})$ è > 0 .
 è re $\rho \leq r - \delta$ per $\delta > 0$ segue $(r - \rho)^2 \geq \delta^2 > 0$

\Rightarrow in ogni cerchio $B_{r-\delta}(0)$ con $\delta > 0$ il $\text{he}(R_{\rho})$ è
 - regolare, derivabile o volte
 - con derivate continue

$$\left| \frac{\partial h(\rho, \theta)}{\partial \rho} \right| \leq C \frac{1}{\rho} \text{ per } \rho \leq r - \delta$$

Proprietà (proprietà di convergenza per serie integrali).
 Continuità e densità di \int dipendenti da un parametro.

Sia $u(x) = \int_{\Omega} f(x, y) dy$, e questo è il \int dipendente dal parametro x

Sia $x \in (a, b)$. Ci chiedono sotto quali lip
 - u è continua
 - u è derivabile, e che regola

$$u'(x) = \frac{d}{dx} u(x) = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) dy$$

Alm. Sia $u(x) = \int_{\Omega} f(x, y) dy$ e supponiamo che

- $\forall x \in (a, b)$ $f(x, \cdot) \in L^1(\Omega)$
- per $\forall y \in \Omega$ la fun $x \mapsto f(x, y)$ è C^0 in x_0
- $\exists g(y) \in L^1(\Omega) : |f(x, y)| \leq g(y) \quad \forall x \in (a, b) \quad \forall y \in \Omega$

allora $\Rightarrow u$ è continua in x_0 , cioè

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \int_{\Omega} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) dy$$

Alm. Sia $u(x) = \int_{\Omega} f(x, y) dy$, e supponiamo che

- $\forall x \in (a, b)$ $f(x, \cdot) \in L^1(\Omega)$
- per $\forall y \in \Omega$ $\exists \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ ed $\exists g \in L^1(\Omega) : \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| \leq g(y)$
 $\forall x \in (a, b), \forall y \in \Omega$ (per $\forall y$)

allora $\Rightarrow \exists u'(x) = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy$

Quindi per noi con

$$u(p, \theta) = \int_0^{2\pi} f(s) h(p, \theta - s) ds$$

Segue che in ogni cerchio $p \leq r - \delta$ per $\delta > 0$ si ha che h e tutte le sue derivate generali sono limitate #1

$$\left| \frac{\partial}{\partial p} \int_0^{2\pi} f(s) h(p, \theta - s) ds \right| \leq C \cdot |f|$$

ma sup. $f \in L^1$, cioè
ris. integrabile

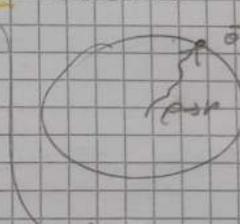
\Rightarrow in ogni cerchio $B_{r-\delta}(0)$ la fun. $u(p, \theta)$ e' conforme ∞ volte, e' C^∞ cioè, $C^\infty(B_{r-\delta}(0))$

E' facile che h e' una fun. armonica su $h = 0$ nel cerchio (*) in $B_{r-\delta}(0)$
mostriamo ora che:

Lemma Se $f \in C^0([0, 2\pi])$ e $f(0) = f(2\pi)$ allora

$$\boxed{u(p, \theta) \xrightarrow{p \rightarrow r, \theta \rightarrow \bar{\theta}} f(\bar{\theta})}$$

quindi la costante di Lipschitz ∞
aumenta con la scala fissata
costante della f



non serve la regola
e' tratto ora

Proviamo che $u(p, \theta) \xrightarrow{p \rightarrow r} f(\theta)$.

Sembra nuovo, ma no:

$$|u(p, \theta) - f(\bar{\theta})| \leq |u(p, \theta) - f(\theta)| + |f(\theta) - f(\bar{\theta})|$$

$\leq \epsilon$ se p e' degn la parte superiore $\leq \epsilon$ perché $f \in C^0$

$$\begin{aligned} u(p, \theta) - f(\bar{\theta}) &= \int_0^{2\pi} f(s) h(p, \theta - s) ds - f(\bar{\theta}) \cdot \int_0^{2\pi} h(p, \theta - s) ds \\ &= \int_0^{2\pi} f(s) h(p, \theta - s) ds - f(\bar{\theta}) \left[\int_0^{2\pi} h(p, \theta - s) ds \right] \\ &= \int_0^{2\pi} [f(s) - f(\bar{\theta})] h(p, \theta - s) ds \leq (\text{in } | \cdot |) \\ &\leq \int_0^{2\pi} |f(s) - f(\bar{\theta})| \cdot h(p, \theta - s) ds = \\ &= \int_{|s-\bar{\theta}| \leq \delta} + \int_{|s-\bar{\theta}| > \delta} := A_\delta + B_\delta \end{aligned}$$

f e' continua in \bar{D} per cui per ogni $\epsilon > 0$ $\exists \delta$:
 $|f(s) - f(\bar{\theta})| \leq \epsilon$ per $|s - \bar{\theta}| \leq \delta$

$$\Rightarrow A_\delta \leq \epsilon \int_{|s-\bar{\theta}| \leq \delta} h(p, \theta - s) ds \leq \epsilon \cdot 1 \leq \epsilon$$

\rightarrow la parte

#2 \rightarrow per piccoli δ sulla
conf. $\int_0^{2\pi} h = 1$

$$B_\delta = \int_{|s-\bar{\theta}| > \delta} |f(s) - f(\bar{\theta})| \frac{r^2 - p^2}{2\pi(r^2 + p^2 - 2rp \cos(\theta - s))} ds$$

\rightarrow non possono lavorare $r^2 + p^2 - 2rp \cos(\theta - s) \geq r^2 + p^2 - 2rp \cos \delta \geq C_\delta > 0$
perché δ e' distante da 0

$$\Rightarrow B_\delta \leq 2 \max |f| \cdot (r^2 - p^2) \cdot \frac{1}{2\pi C_\delta} \leq \text{cost} (r^2 - p^2) \leq \epsilon$$

$\leq \epsilon$ per $r - p \leq \delta$

$\Rightarrow A\delta + B\delta + 2\epsilon$ per $0 < \epsilon < \delta < \delta$, quindi

$$m(\rho, \epsilon) - f(0) \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0 \quad \square$$

Dimostrare la formula integrale di Riemann e spiegare la relazione
 di $\int_{\partial B_r(0)} \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ in $B_r(0)$ $\forall f \in C^0(\partial B_r(0)) + f(0) = f(r+1)$

e la relazione $u \in C^0(B_r(0))$.

\hookrightarrow se la f è continua sul bordo allora la u è continua con continuità.

Problema di Dirichlet per $\Delta u = 0$ nel semipiano
 nel caso di tracci di Fourier.

Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Definiamo

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx$$

$$\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

lim $\hat{f}(\xi) = 0$

- Se f è dato che $f \in L^1$
 $\hat{f} \in C^\infty$ segue dal fatto che la $f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x}$ è continua, e moltiplicabile con
 $|f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x}| \leq |f(x)| \cdot 1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$

\Rightarrow segue dal tlm di prima (con λ parametro)

- Se invece $\hat{f} \in C_0^\infty$ segue dal notare che
 $|\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1} \Rightarrow \mathcal{F}$ è un operatore lin cont.
 $\mathcal{F}: L^1 \rightarrow C_0^\infty$

$$\|\hat{f}\|_{C_0^\infty} = \sup_{\xi} |\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1}$$

Plw (o inversione).

Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, se anche $\hat{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ allora

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{+2\pi i \xi \cdot x} d\xi = \\ &= \mathcal{F}(\hat{f}) \end{aligned}$$

la trasformata di Fourier delle trasformate di Fourier di f è f stesso

Plw (o annullamento).

Siano $f, g \in L^1$, era def.

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy \quad \text{che } \in L^1 \text{ ancora}$$

$$\text{vale che } \mathcal{F}(f * g)(\xi) = \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi)$$

Plw (trasformate delle derivate).

Sia f continua, regolare e fastidi, $f(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow \pm\infty$ e
 tale che $f, \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

allora

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\xi) = 2\pi i \xi_i \hat{f}(\xi)$$

$$\mathcal{F}(D^\alpha f)(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$$

perché $\xi \in \mathbb{R}^n$
 con $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un
 multiindice. Così:

$$D^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \dots \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \quad f^0 = f^1 \dots f^m$$

$$\text{E. (E2)} \quad \mathcal{F} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} \right) = (2\pi i \xi_j)^2 \bar{f}(\xi) = -4\pi^2 \xi_j^2 \bar{f}(\xi)$$

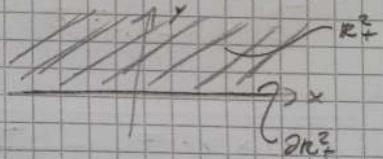
Le hp sotto cui vale quella generale sono:
per un certo $k=1 \rightarrow n$ supponiamo che

- $f \in C^{k-1}(\mathbb{R}^n)$, regolare e tratti
 - le derivate di ordine $k-1$ sono C^0
 - le derivate di ordine k sono L^1
- } fino a quella ordine (non solo loro)

Allora \forall multipli α vale la formula sopra.

Problema di Dirichlet per l'eqz di Laplace nel semipiano

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & \text{per } x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,y) = f(x) & \text{per } x \in \mathbb{R}, y=0 \end{cases}$$



questo è il bordo

Calcoliamo una sol^o col metodo delle trasformate di Fourier.

La $f(x)$ possiamo trasformarla solo rispetto alla x .

$$\bar{u}(\xi, y) = \int_{\mathbb{R}} u(x,y) e^{-2\pi i \xi x} dx \quad \text{con parametri } \xi \text{ e } y$$

$$\mathcal{F}(\Delta u) = \mathcal{F}(u_{xx} + u_{yy}) = 0$$

$$\cdot \mathcal{F}(u_{xx})(\xi, y) = -4\pi^2 \xi^2 \bar{u}(\xi, y)$$

$$\cdot \mathcal{F}(u_{yy})(\xi, y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} e^{-2\pi i \xi x} dx = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{\mathbb{R}} u(x,y) e^{-2\pi i \xi x} dx = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \bar{u}(\xi, y)$$

ci sta. L'eqz in y con certe hp

\Rightarrow 2) eqz oventica

$$-4\pi^2 \xi^2 \bar{u}(\xi, y) + \frac{\partial^2 \bar{u}(\xi, y)}{\partial y^2} = 0$$

che è una EDO (lin, omogenea, coeff costanti, perché ξ è un parametro)

L'eqz caratteristica è $\alpha^2 = 4\pi^2 \xi^2 \Rightarrow \alpha = \pm 2\pi|\xi|$ quindi

$$\bar{u}(\xi, y) = C_1(\xi) e^{2\pi|\xi|y} + C_2(\xi) e^{-2\pi|\xi|y} \quad \text{e l'ipotesi}$$

Imponendo che u (e quindi \bar{u}) $\rightarrow 0$ per $y \rightarrow +\infty$ deve valere (per ipotesi?) $C_1(\xi) = 0$

$$\Rightarrow \bar{u}(\xi, y) = C(\xi) e^{-2\pi|\xi|y} \quad (\text{per } y > 0 \text{ come e' nel prob})$$

$\frac{e^{-\infty} = 1}{\text{se } y=0}$

Imponiamo la cc:

$$u(x, 0) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{ trasformiamo nelle lei}$$

$$\bar{u}(\xi, 0) = \bar{f}(\xi)$$

$$\Rightarrow \bar{f}(\xi) = \bar{u}(\xi, 0) = C(\xi)$$

perché la trasformata di Fourier $\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ per \mathbb{R}

$$\tilde{u}(x, y) = \hat{f}(\xi) e^{-2\pi|\xi|y}$$

altre determinate incoerente la trasformata di Fourier della sola \tilde{u} (per il teo di univocità) ma prende anche la sola stessa (per il teo di univocità) generalizzata di entità trasformata.

Le forme $e^{-2\pi|\xi|y} = \mathcal{F}(h(\cdot, y))$ allora avremo che:

$$\tilde{u} = \hat{f} \cdot h(x, y) = \mathcal{F}(f * h) = \mathcal{F}(u) \Rightarrow u = f * h$$

Ma $e^{-2\pi|\xi|y}$ lo rappresenta entità trasformata:

$$\mathcal{F}(e^{-a|x|})(\xi) = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2\xi^2} \in L^1(a > 0)$$

\Rightarrow dal teo di univocità si vede verso che

$$\mathcal{F}\left(\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2\xi^2}\right)(x) = e^{-a|x|} \rightsquigarrow e^{-2\pi|\xi|y}$$

\Rightarrow scegliendo $a = 2\pi y$

Dunque

$$h(x, y) = \frac{2\pi y}{4\pi^2 y^2 + 4\pi^2 x^2} = \frac{1}{\pi} \frac{y}{y^2 + x^2}$$

che è detta nucleo di Poisson nel semipiano.

$$\Rightarrow u(x, y) = \int_{\mathbb{R}} h(x-s, y) f(s) ds = \frac{y}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(s)}{(x-s)^2 + y^2} ds$$

$$h(\cdot, y) * f(\cdot)$$

y è un parametro per \mathbb{R}

Proprietà del $\ker(Pois)$:

- $h(x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} > 0 \Rightarrow \ker(Pois)$ è > 0 , è C^∞

- $\int_{\mathbb{R}} h(x, y) dx = \frac{1}{\pi} y \left(\arctan\left(\frac{x}{y}\right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} \right) \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) = 1 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \ker(Pois) = 1$

- $\ker(Pois)$ è convessa nel semipiano $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

Se per calcolare il laplaciano, rinvio:

$$\frac{1}{z} \in \mathbb{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) + i \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$$

non annulla solo nel \mathbb{H} di \mathbb{C} di \mathbb{R}^2

Quindi:

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(s)}{(x-s)^2 + y^2} ds$$

In ogni regione in cui $y \geq \delta > 0$ il $\ker(Pois)$ è liscio e liscio.

Quindi:

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{\pi} \frac{f(s)}{(x-s)^2 + y^2} \right) \right| \leq c \cdot |f(s)| \in L^1(\mathbb{R})$$

\Rightarrow In ogni regione del tipo $\{x: \gamma > 0\}$ regno che $u \in C^0$
 e quindi armonica (perché $\Delta u = 0$)

$\Rightarrow u \in C^0(\{x: \gamma > 0\})$ e $\Delta u = 0$ per $\gamma > 0$

In che senso è costruita la CC? vedremo.

$$u(x, y) = \int_{\mathbb{R}} f(\sigma) h(x - \sigma, y) d\sigma$$

Parentesi (nuclei regolari)

Sia $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una fun. tale che

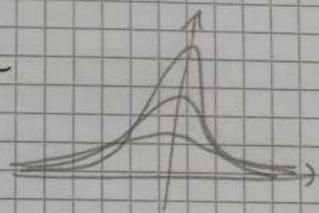
- $\varphi \geq 0$
- $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$

E porremo $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ con $n =$ dimensione dello spazio \mathbb{R}^n

Le famiglie di funzioni $\{\varphi_\varepsilon(x)\}_{\varepsilon > 0}$ è detta nucleo regolatore (o approssimazione dell'identità o mollificatori).

Es. (E1) $\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$ ($e^{-1} > 0, \int_{\mathbb{R}} = 1$)

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{\varepsilon^2}} = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}$$



Se chiamiamo $\varepsilon = y$ o altre cose

$$h(x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

(E2) $\varphi(x) = e^{-\pi|x|^2}$ detta nucleo di Gauss

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} e^{-\pi^2 \frac{x^2}{\varepsilon^2}}$$

questo convoluto (è) è cioè una media pesata delle parti "vicinissime" della f

$$(f * \varphi_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \varphi_\varepsilon(x - y) dy$$

Teor. Se $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ è un' approssimazione dell'identità e $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ per $p \in (1, +\infty)$ allora

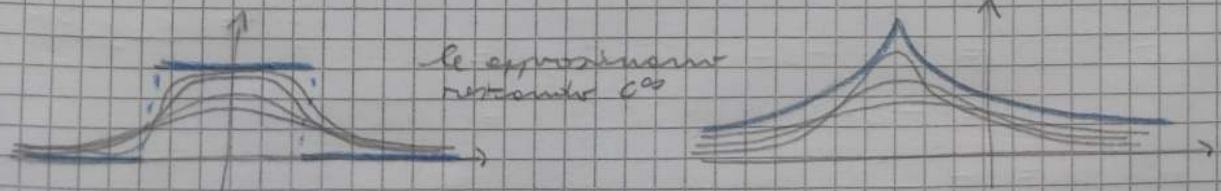
$$(f * \varphi_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} f \text{ in } L^p(\mathbb{R}^n)$$

Se $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ allora

$$(f * \varphi_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} f \text{ uniformemente}$$

ogni φ_ε di per sé è C^∞ , e quella convoluzione lascia la fun. originale C^∞ , ma tende ad approssimare la fun. f , che magari non è molto regolare.

04/03



Il ker(Kaw) $h(x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} = \varphi_\varepsilon(x) / \varepsilon = y$ con la fun. madre $\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$. Allora si capisce che la rel.

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{(x-s)^2 + y^2} f(s) ds$$

$$= (f * \chi_y)(x)$$

⇒ Teor. (di Poisson)

Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ allora $u(\cdot, y) \xrightarrow{y \rightarrow 0^+} f$ in $L^1(\mathbb{R})$

Se $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C_c^\infty(\mathbb{R})$ allora $u(\cdot, y) \xrightarrow{y \rightarrow 0^+} f$ uniformemente

$\mathbb{E}_2 (\in \mathbb{1})$ $\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0 \\ u(x,0) = \mathbb{1}_{(-1,1)}(x) \end{array} \right.$ $\left. \begin{array}{l} y > 0, x \in \mathbb{R} \\ (y=0) x \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{y}{(x-s)^2 + y^2} ds =$$

$$\left\{ \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[x \frac{1}{y} \arctan\left(\frac{x-s}{y}\right) \right]_{-1}^1 =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\arctan\left(\frac{x-1}{y}\right) - \arctan\left(\frac{x+1}{y}\right) \right]$$

Per l'unicità della sol. serve un teor., non possiamo usare quello reale (perché ora risolviamo su \mathbb{R} non limitato)

In questo caso ci per il problema $\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0 \\ u = f \end{array} \right.$ $\left. \begin{array}{l} y > 0, x \in \mathbb{R} \\ y = 0, x \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$

vole l'unicità della sol. se $u \in$ classe di fun. limitate in tutto il semipiano.

Senza questa lip non c'è!

Controes. $u(x,y) = e^x \sin y$, $\Delta u = 0$ perché $\Delta u = (e^x \sin y)'' = 0$.

Sei e^x sol. di $\Delta u = 0$ nel semipiano $y > 0$ $x \in \mathbb{R}$

$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0 \\ u = 0 \end{array} \right.$ ma anche $u=0$ è sol. allora

⇒ non c'è unic. (senza proprietà lip nel compatificato all'∞)

La sol. stiamo cercando nel semipiano $y > 0$ al bordo $y=0$ è illimitato

L'eq. di Poisson in tutto lo spazio. Avevamo $\Delta u = f$ in \mathbb{R}^n

Proviamo a risolvere l'eq. col metodo delle transf.

$$\mathcal{F}(\Delta u) = \mathcal{F}(f)$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right) = (2\pi i \xi_i)^2 \hat{u} = -4\pi^2 \xi_i^2 \hat{u}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(\Delta u) = \sum_i -4\pi^2 \xi_i^2 \hat{u}(\xi) = -4\pi^2 |\xi|^2 \hat{u}(\xi) = \mathcal{F}(f)$$

$$\Rightarrow \hat{u}(\xi) = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{\mathcal{F}(f)}{|\xi|^2}$$

Se trovo $h(x)$: $\hat{h}(\xi) = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{|\xi|^2}$ avremo $\hat{u} = \hat{f} \cdot \hat{h}$
e quindi $u(x) = h(x) * f(x)$

Se $h \in L^2$ allora $\tilde{h} \in C_0^\infty$, ma quella \tilde{h} è discontinua.
 Se $h \in L^2$ allora $\tilde{h} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, ma quella $\tilde{h} \notin L^2$ (ne
 male inteso a zero)
 \Rightarrow il metodo sembra non funzionare (in modo semplice almeno).

Per risolvere $\Delta u = f$ con f "qualsiasi" (intanto)
 \Rightarrow risolveremo prima

$$\Delta u = -\delta_0$$

vediamo come
 appare δ_0 .

come carica negativa (solo δ_0)
 posta nell'origine dello spazio \mathbb{R}^3
 \Rightarrow u è il potenziale elett. di δ_0
 ci aspettiamo che è Δu residuo allora

Problema di enunciazione.

trovare la rel. e simmetria radiale di $\Delta u = 0$
 nello spazio $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Sia $u(x) = U(|x|)$, cioè u è simmetria radiale.
 Calcoliamo Δu :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} U(|x|) \stackrel{\text{derivata}}{=} U'(\rho) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} |x| \quad (\rho = |x| = \sqrt{\sum x_i^2} = \|x\|)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} |x| = \frac{\partial}{\partial x_i} \sqrt{\sum x_j^2} = \frac{1}{2} \frac{2x_i}{\sqrt{\sum x_j^2}} = \frac{x_i}{\rho}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} U(|x|) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(U'(\rho) \cdot \frac{x_i}{\rho} \right) \stackrel{\text{derivata}}{=} \text{vedi foglietto}$$

$$= U''(\rho) \frac{x_i^2}{\rho^2} + U'(\rho) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{x_i}{\rho} \right) =$$

$$= U''(\rho) \frac{x_i^2}{\rho^2} + U'(\rho) \left[\frac{\rho^2 - x_i^2}{\rho^3} \right]$$

$$\Rightarrow \Delta u = \sum_{i=1}^n \left[U''(\rho) \frac{x_i^2}{\rho^2} + U'(\rho) \frac{\rho^2 - x_i^2}{\rho^3} \right] = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\rho^2} = \rho^2$$

$$= \frac{U''(\rho)}{\rho^2} \sum x_i^2 + \frac{U'(\rho)}{\rho^3} (n\rho^2 - \rho^2) =$$

$$= U''(\rho) + \frac{n-1}{\rho} U'(\rho)$$

$$\Rightarrow \Delta U(|x|) = U''(\rho) + \frac{n-1}{\rho} U'(\rho)$$

(per $n=2$) $U''(\rho) + \frac{1}{\rho} U'(\rho)$

che è come quella su \mathbb{R}^2 in
 coordinate polari (non cioè $\partial/\partial \theta$
 se la radialità)

Cercare la $U(\rho)$ tale che

$$U''(\rho) + \frac{n-1}{\rho} U'(\rho) = 0 \quad \text{per } \rho > 0 \text{ (è fuori dell'origine)}$$

Rovesciando $v(\rho) = U'(\rho)$ regre

$$v'(\rho) + \frac{n-1}{\rho} v(\rho) = 0 \quad \text{EDO a var. separabili}$$

$$\frac{dv}{d\rho} = -\frac{n-1}{\rho} v \quad \int \frac{1}{v} dv = (1-n) \int \frac{1}{\rho} d\rho$$

$$\ln|v| = (1-n) \ln|\rho| = \ln(\rho^{1-n})$$

$$v(\rho) = U'(\rho) = C_1 \rho^{1-n}$$

- per $n=2$:
 $U = C_1 \rho^{1-2} = \frac{C_1}{\rho} \Rightarrow U(\rho) = C_1 \ln \rho + C_2$
 ed esse in logaritmi

- per $n \geq 3$:
 $U(\rho) = C_1 \rho^{2-n} + C_2 = \frac{C_1}{\rho^{n-2}} + C_2$
 ed esse ancora in potenze
 conclusioni da affinare da $\Delta u = -\delta_0$ (nessa + qual cosa $\cdot \delta_0$)

Dunque:
 le solⁿ radiali che $\Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sono

$$u(x) = \begin{cases} \frac{C_1}{|x|^{n-2}} + C_2 & \text{se } n \geq 3 \\ C_1 \ln|x| + C_2 & \text{se } n = 2 \end{cases} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

Il potenziale non varia per costanti additive
 \Rightarrow possiamo $C_2 = 0$

Utile notare che per un opportuno valore di $C_1 = C_1(n)$ risulta
 $\Delta u = -\delta_0$ (nel senso delle distribuzioni, $D'(\mathbb{R}^n)$)

Parentesi (caso speciale di \mathbb{R}^n , per \int su \mathbb{R}^n).

In dimensione n qualsiasi si possono definire delle coordinate sferiche:

$$\begin{cases} x_1 = \rho \omega_1(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \\ x_2 = \rho \omega_2(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \\ \vdots \\ x_n = \rho \omega_n(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \end{cases}$$

ω_i con $\sum_{i=1}^n \omega_i^2 = 1$ sono
 finⁿ di $n-1$ angoli
 (come φ su \mathbb{R}^2 o
 θ, φ su \mathbb{R}^3)

Calcolando la jacobiana esce

$$dx_1 \dots dx_n = \rho^{n-1} \omega(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-1}$$

Restano cose nel due successe: per una f qualunque

$$\int_{|x| \leq R} f(x) dx = \int_0^R \int_{S_\rho} f(\dots) d\sigma d\rho$$

\int_{S_ρ} superficie della sfera (iper) di raggio ρ
 $d\sigma = \rho^{n-1} d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-1}$
 nel caso di \int su una sfera radiale:

$$\int_{|x| \leq R} f(|x|) dx = \int_0^R f(\rho) \rho^{n-1} \left(\int_{S_1} d\sigma_1 \right) d\rho =$$

$$= \int_0^R f(\rho) \rho^{n-1} \cdot \omega_n d\rho$$

ω_n area della superficie della sfera unitaria $\} := \omega_n$

- se $f=1$ quella \int dà il volume della sfera
- mentre per la superficie

$$\text{vol}(B_R(0)) = \omega_n \frac{R^n}{n}$$

$$\text{area}(\partial B_R(0)) = \omega_n R^{n-1}$$

Qua, per quali α la funⁿ $f(x) = \frac{1}{|x|^\alpha} \in L^1(B_R(0))$?
 per questo ritorna:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x|^\alpha} dx = \omega_n \int_0^\infty \frac{1}{\rho^\alpha} \rho^{n-1} d\rho = \omega_n \int_0^\infty \rho^{n-\alpha-1} d\rho \quad \tau \rightarrow \infty \quad (\Rightarrow \alpha < n) \quad (*)$$

\Rightarrow in \mathbb{R}^n la funz $\frac{1}{|x|^\alpha} \in L^1_{loc}$ per $\alpha < n = \dim \text{spazio}$

Distribuzioni (inclusioni) in \mathbb{R}^n .
Definiamo le

spazio delle funz test = $D(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

spazio delle deriv. in \mathbb{R}^n = $D'(\mathbb{R}^n)$

$T \in D'(\mathbb{R}^n)$ se $T: D(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ e' un funzionale lineare su $D(\mathbb{R}^n)$ e continuo (in un certo senso)

E. (E1) Se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ genero def la distribuzione

$$T_f: \varphi \in D(\mathbb{R}^n) \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) f(x) dx = \int_{\text{supp } \varphi} \dots$$

e' lineare e cont.

l'azione della deriv. sulla funzione φ e la inclusione $\langle T, \varphi \rangle$

(E2) Delta di Dirac. $\delta_{x_0}: D(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0)$$

per la δ_{x_0} e' una funzione che la derivata nel punto \downarrow

Def. Se $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ la derivata della distribuzione e' la distribuzione che esprime così:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} T, \varphi \right\rangle = - \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle$$

nel caso in cui $T = T_f$ con $f \in L^1_{loc} \cap C^1$ su \mathbb{R}^n allora quella def ha un'altra forma:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} T_f, \varphi \right\rangle &= - \left\langle T_f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle = - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \varphi dx = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle \end{aligned}$$

Se $f \in C^1 \cap L^1_{loc}$ allora $\frac{\partial}{\partial x_j} T_f = T_{\frac{\partial f}{\partial x_j}}$ (coerenza)

Adesso e' ~~A.1~~ $\Delta(u) = 0$ l'ell. omogeneo

$$\Delta \left(\frac{1}{|x|^{n-2}} \right) = 0 \quad \text{su } \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \text{perche' } n-2 < n \quad (*)$$

e la funz $u(x) := 1/|x|^{n-2} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ genero

$$u \in L^1_{loc} \Rightarrow \in D'(\mathbb{R}^n)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} \sim \frac{1}{|x|^{n-1}} \in L^1_{loc} \Rightarrow \in D'(\mathbb{R}^n)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \sim \frac{1}{|x|^n} \notin L^1_{loc}$$

si ottiene annullando e $\Delta(u) = f$

Proprietà genero che per una certa costante $c \in \mathbb{R}$

$$\Delta \left(\frac{c}{|x|^{n-2}} \right) = -\delta_0$$

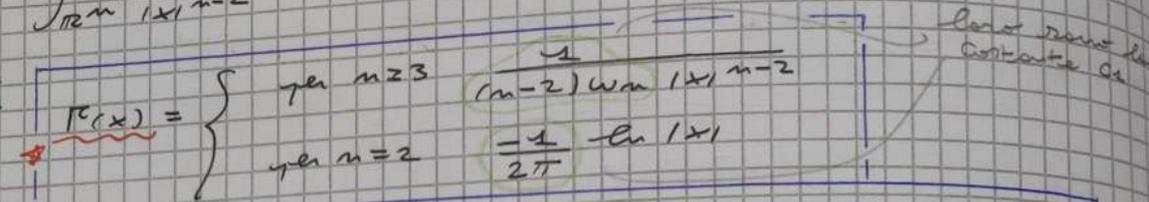
in $D'(\mathbb{R}^n)$ nel senso dell'azione delle distrib. su:

$$\left\langle \Delta \left(\frac{c}{|x|^{n-2}} \right), \varphi \right\rangle = ? \quad \langle -\delta_0, \varphi \rangle = -\varphi(0)$$

si la destra di distribuzione
che possiamo calcolare

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \frac{c}{|x|^{n-2}} \Delta \varphi(x) dx = ? \quad -\varphi(0)$$

Calcoliamo



allora

$$\Rightarrow \Delta f = -\delta_0 \text{ in } D'(\mathbb{R}^n), \text{ cioè } \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \Delta \varphi(x) dx = -\varphi(0) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Dim. (caso $n \geq 3$). Calcoliamo, per $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x|^{n-2}} \Delta \varphi(x) dx$$

supponiamo che
sint $\varphi \in C_B(\mathbb{R}^n)$ per
qualche $R > 0$

quindi $\int_{\mathbb{R}^n} \dots = \int_{|x| \leq R} \dots$

non è difficile usare la 2° IDG:

$$\int_{\Omega} (u \Delta \varphi - \varphi \Delta u) dx = \int_{\partial \Omega} \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma$$

ma per applicarla serve regolarità, che non c'è in 0. Quindi consideriamo

$$\int_{|x| \leq R} \frac{1}{|x|^{n-2}} \Delta \varphi(x) dx = \int_{|x| \leq \varepsilon} \frac{1}{|x|^{n-2}} \Delta \varphi(x) dx + \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} \frac{1}{|x|^{n-2}} \Delta \varphi(x) dx = A_\varepsilon + B_\varepsilon$$

quindi da
- $A_\varepsilon \rightarrow 0$ per $\varepsilon \rightarrow 0$

$$|A_\varepsilon| = \left| \int_{|x| \leq \varepsilon} \frac{1}{|x|^{n-2}} \Delta \varphi(x) dx \right| \leq \int_{|x| \leq \varepsilon} \frac{1}{|x|^{n-2}} |\Delta \varphi(x)| dx \leq$$

$$\leq \max |\Delta \varphi| \cdot \int_{|x| \leq \varepsilon} \frac{1}{|x|^{n-2}} dx = \int_{\text{di fun.}} \text{radiale}$$

$$= \max |\Delta \varphi| \cdot \omega_n \int_0^\varepsilon \frac{1}{\rho^{n-2}} \rho^{n-1} d\rho =$$

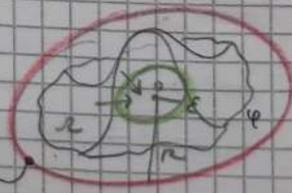
$$= c \int_0^\varepsilon \rho d\rho = c \frac{\varepsilon^2}{2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

$$- B_\varepsilon = \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} \frac{1}{|x|^{n-2}} \Delta \varphi(x) dx = \int_{\partial \Omega} \left(\frac{1}{|x|^{n-2}} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|x|^{n-2}} \right) \right) d\sigma =$$

$$= \int_{\partial \Omega} \Delta \left(\frac{1}{|x|^{n-2}} \right) \varphi dx + \int_{\partial \Omega} \left(\frac{1}{|x|^{n-2}} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|x|^{n-2}} \right) \right) d\sigma =$$

= 0 perché vale
nell'IDG per
costante

è una
costante
spazio:
quindi è
cui nulla



sulla parte
reale ($|x|=R$)
tutto si annulla
perché
del lato
computer

$$= \int_{|\sigma|=\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^{n-2}} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma - \int_{|\sigma|=\varepsilon} \varphi(\sigma) \left(\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|\sigma|^{n-2}} \right) d\sigma =$$

$$= B_\varepsilon^{(1)} + B_\varepsilon^{(2)}$$

$$|B_\varepsilon^{(1)}| = \left| \int_{|\sigma|=\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^{n-2}} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma \right|$$

$$\leq \max |\varphi| \frac{1}{\varepsilon^{n-2}} \int_{|\sigma|=\varepsilon} d\sigma = C\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

$\omega_n \varepsilon^{n-1} = \text{superficie della sfera } \mathbb{S}^{n-1}$

$$|B_\varepsilon^{(2)}| = \left| \int_{|\sigma|=\varepsilon} \varphi(\sigma) \left(\nabla \left(\frac{1}{|\sigma|^{n-2}} \right) \cdot \left(\frac{-\sigma}{|\sigma|} \right) \Big|_{\sigma=\sigma} \right) d\sigma \right|$$

$$= \int_{|\sigma|=\varepsilon} \varphi(\sigma) \frac{(2-n)}{|\sigma|^{n-2}} d\sigma = \frac{2-n}{\varepsilon^{n-2}} \int_{|\sigma|=\varepsilon} \varphi(\sigma) d\sigma =$$

$\frac{2-n}{\varepsilon^{n-2}} \left(\frac{\sigma \cdot \sigma}{|\sigma|} \right) = \frac{2-n}{\varepsilon^{n-2}} \varepsilon = (2-n) \omega_n \varepsilon^{n-1}$

l'area di $\{|\sigma|=\varepsilon\}$ è $\omega_n \varepsilon^{n-1}$ quindi

$$= \frac{(2-n)}{\omega_n \varepsilon^{n-2}} \cdot \omega_n \varepsilon^{n-1} \int_{|\sigma|=\varepsilon} \varphi(\sigma) d\sigma =$$

$$= (2-n) \omega_n \cdot \left(\text{media integrale di } \varphi \text{ su } \{|\sigma|=\varepsilon\} \right)$$

$\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0}$ $(2-n) \omega_n \varphi(0)$
 + la media integrale \Rightarrow da qui esce il (-) per $-\varphi(0)$
 φ calcolata nel pt σ in cui collochiamo

Dunque:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|\sigma|^{n-2}} \Delta \varphi(\sigma) d\sigma = A\varepsilon + B\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} (2-n) \omega_n \varphi(0)$$

Definiamo $\Gamma(\sigma) = \frac{1}{|\sigma|^{n-2} \omega_n (n-2)}$ e quindi

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(\sigma) \Delta \varphi(\sigma) d\sigma = -\varphi(0)$$

In due di la Γ detta regola è la rela fondamentale di Δ in \mathbb{R}^n :

$$\Delta \Gamma = -\delta$$

ma non è un'azione di unita: $\Delta(\Gamma + \text{qualunque}) = -\delta + 0$

Corollario
 $\forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ la funzione

$$u(x) = - \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y) f(y) dy$$

è una rela di $\Delta u = f$ in \mathbb{R}^n .

Dim. Calcoliamo

$$\Delta u(x) = \Delta_x \left[- \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y) f(x-y) dy \right] =$$

$$= - \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y) \Delta_y f(x-y) dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y) f(x-y) dy$$

$= (f) \text{ calcolata in } x-y$

Definiamo Γ nel regio di Δ (volgarmente Δ la Δ di Γ) \Rightarrow la derivata 2^a limite

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(-z) dz = - \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(-z) (\Delta \varphi)(x+z) dz = \\
 &= - \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(z) (\Delta \varphi)(x+z) dz = \\
 &\quad \text{ma} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(z) \Delta \varphi(z) dz = -\varphi(0) \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ quindi con } f(x+z) = \varphi(z) \\
 &= -(-\varphi(0)) = \varphi(0) = \varphi(z) \Big|_{z=0} = \underbrace{f(x+z)}_{(0=z)} \Big|_{z=0} = f(x) \\
 &\Rightarrow \Delta u = f \quad \square
 \end{aligned}$$

* non vale al (-) del cambio di variabile perché
 un risultato fondamentale come nel Teo. 5.1 ma
 in la conclusione anche gli termini dell'1

Tale da prendere del corso: conclusioni solo di una certa
 forma (alle quali non hanno nulla)
 molte procedure all'1 non erano necessarie, ma
 solo a mostrare disuguaglianze perché le altre
 si trovano in rete

Per questi ultimi punti, la rappresentazione "alla Poisson"
 è un'alternativa interessante (ma può essere
 dimostrata)
 ⇒ per le EDP non c'è un metodo sistematico con
 le EDO, come possibile sempre sulla faccia della
 terra

Non sono ora da \mathbb{R}^n e un loro limitatore Ω e non sono
 essere generali.

Ci interessa $\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$

risolvendo un analogo della relazione condovvibile per un
 dominio Ω .

Valm (dei 3 potenziali)

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dominio limitato e Lip. Ω sia
 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$. Allora vale che

$$\forall x \in \Omega \quad \boxed{
 \begin{aligned}
 u(x) &= - \int_{\Omega} \Gamma(x-y) \Delta u(y) dy + & \} 1 \\
 &+ \int_{\partial\Omega} \Gamma(x-\sigma) \frac{\partial u}{\partial n}(\sigma) d\sigma + & \} 2 \\
 &- \int_{\partial\Omega} u(\sigma) \frac{\partial \Gamma}{\partial n}(x-\sigma) d\sigma & \} 3
 \end{aligned}
 }$$

dove Γ è la
 relazione condovvibile

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \frac{1}{(n-2)\omega_n |x|^{n-2}} & n \geq 3 \\ -\frac{1}{2\pi} \ln|x| & n = 2 \end{cases}$$

Formalmente:

applicando la 2ª IDG su Ω alla $f \Rightarrow \Gamma(x-\cdot)$, si:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \Gamma(x-y) \Delta u(y) dy - u(x) \int_{\partial\Omega} \Gamma(x-y) dy &= \\
 = \int_{\partial\Omega} \Gamma(x-\sigma) \frac{\partial u}{\partial n}(\sigma) d\sigma - u(x) \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Gamma}{\partial n}(x-\sigma) d\sigma &=
 \end{aligned}$$

-u(x) perché

$$\nabla_y \Pi(y) = f_0 \Rightarrow -\Delta_y \Pi(x-y) = f_x$$

Il nome del teorema è per il ricercatore fisico dei tre integrali:

- 1: potenziale newtoniano di densità su

$$-\int_{\Omega} \Pi(x-y) \Delta u(y) dy$$
- 2: potenziale di densità semplice di densità $\frac{\partial u}{\partial n}$

$$\int_{\partial \Omega} \Pi(x-y) \frac{\partial u}{\partial n}(y) dy$$
- 3: potenziale di densità strato di momento $u(y)$

$$-\int_{\partial \Omega} \frac{\partial \Pi}{\partial n}(x-y) u(y) dy$$

Se voglio risolvere $\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial \Omega \end{cases}$

potrei pensare di scrivere $u(x) = \dots$ (somma dei 3)

dove in Ω sostituisco $\Delta u = f$
 in Ω sostituisco $u(y) = g$ ← è richiesta la prop di Dirichlet/Neumann

Problema: in Ω come conoscere $\frac{\partial u}{\partial n}$

⇒ C'è sempre un solo teorema

- prop di Dirichlet: non posso non avere Ω
- prop di Neumann: non posso non avere Ω

Caro problema di Dirichlet.

Per ottenere una formula del tipo $u(x) = \Omega + \Omega$ mi serve un rappresentante della $\Pi(x-y)$ estratto al dominio Ω .

⇒ Entrambe le funzioni di Green.

Def. Si dice funzione di Green per il dominio Ω una fun $G(x,y)$, se \exists tale che

$$\begin{cases} -\Delta_x G(x,y) = \delta_x & \text{per } y \in \Omega \\ G(x,y) = 0 & \text{per } y \in \partial \Omega \end{cases}$$

per $y \in \Omega$
 questa vale anche per la Π

chiamo la $G(x,y)$ e' la funzione di Green con polo in x , dove $x \in \Omega$.

risultato: potenziali generati dalle cariche in Ω , meno a meno su $\partial \Omega$

Che relazione c'è con $\Pi(x-y)$?

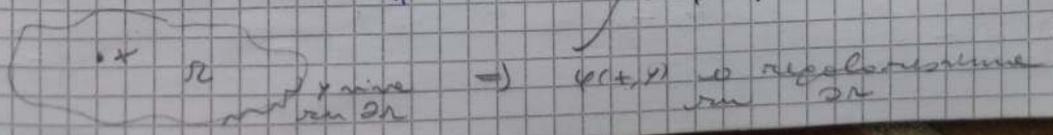
Se siamo $G(x,y) = \Pi(x-y) - \varphi(x,y)$ osservo che:

• $\Delta_y \varphi(x,y) = \Delta_y (\Pi - G) = \delta_x - \delta_x = 0$ ⇒ è armonica

• $\varphi(x,y) = \Pi(x-y)$ per $y \in \partial \Omega$ caso $x \in \Omega$ quando la prop è valida su $\partial \Omega$ vale anche l'aggiunta

⇒ Per determinare $G(x,y)$ (=) ho determinato $\varphi(x,y)$ tale che

$$\forall x \in \Omega \begin{cases} \Delta_y \varphi(x,y) = 0 & \text{per } y \in \Omega \\ \varphi(x,y) = \Pi(x-y) & \text{per } y \in \partial \Omega \end{cases}$$



=> Penso al trovare G trovando φ , risolvendo

$$\begin{cases} \Delta_y \varphi(x,y) = 0 & \text{in } \Omega \\ \varphi(x,y) = \Gamma(x-y) & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Defn. Ω dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitato e Δ_y , \exists la fun di Green $G(x,y)$. Unilaterale

|| $G(x,y) > 0$ per $x,y \in \Omega$

|| $G(x,y) = G(y,x)$ $\forall x,y \in \Omega$

la cosa rende la fun di Green? Il tlm dei 3 prototipi
 allora: sia Ω luv e Δ_y , sia $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$. Dico che

$$u(x) + \int_{\Omega} \Gamma(x-y) \Delta u(y) dy = \int_{\partial\Omega} \Gamma(x-\sigma) \frac{\partial u(\sigma)}{\partial n} d\sigma + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Gamma(x-\sigma)}{\partial n} u(\sigma) d\sigma$$

la Green: $G(x,y) = \Gamma(x-y) - \varphi(x,y)$

scriviamo la 2^a IDG per $u(y)$ e $\varphi(x, \cdot)$:

$$\int_{\Omega} (\varphi(x,y) \Delta u(y) - \Delta_y \varphi(x,y) u(y) dy) = \text{perché } 0 \text{ e } \text{mancava}$$

$$= \int_{\partial\Omega} (\varphi(x,\sigma) \frac{\partial u(\sigma)}{\partial n} - \frac{\partial \varphi(x,\sigma)}{\partial n} u(\sigma) d\sigma)$$

$\mathbb{R}^1 - \mathbb{R}^2$ esce:

$$u(x) + \int_{\Omega} G(x,y) \Delta u(y) dy = \int_{\partial\Omega} G(x,\sigma) \frac{\partial u(\sigma)}{\partial n} - \frac{\partial G(x,\sigma)}{\partial n} u(\sigma) d\sigma$$

Defn. Sia Ω dom luv e Δ_y , $G(x,y)$ la sua fun di Green, $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, allora

$$u(x) = - \int_{\Omega} G(x,y) \Delta u(y) dy - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x,\sigma)}{\partial n} u(\sigma) d\sigma$$

Sembra una buona candidato per il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{in } \partial\Omega \end{cases} \text{ scriviamo:}$$

$$u(x) = - \int_{\Omega} G(x,y) [f(y)] dy - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x,\sigma)}{\partial n} [g(\sigma)] d\sigma$$

Ma sotto qual tipo su f e g la si esercita la quella formula vinche il problema?

- per f basta $g \in C^0(\partial\Omega)$

- per g serve una certa regolarità

Ma comunque nel registro lavoreremo con $f=0$ ($\Delta u=0$)

$$\Rightarrow \text{per risolvere } \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

con Ω dom limitato e Δ_y , $g \in C^0(\partial\Omega)$, $G(x,y)$ fun di Green in Ω

\Rightarrow la sol e data da

$$u(x) = + \int_{\partial \Omega} \underbrace{-\frac{\partial G}{\partial n}(x, \sigma)}_{:= P(x, \sigma)} g(\sigma) d\sigma$$

l'altro verso si annulla
vicino ad $\text{con } f=0$

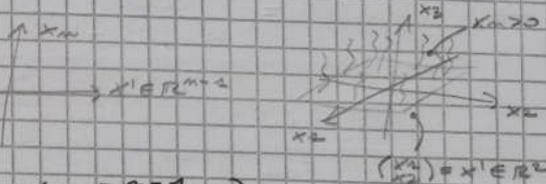
che è detto kernel di Poisson per \mathbb{R}^n

Problema: conoscere $G(x, y)$. Ma se puoi per certe geometrie semplici, si riconducono a scrivere es, esattamente la Δ di Green e poi il $\text{ker}(P_{ii})$.

- dominio di \mathbb{R}^n
- ipers. di \mathbb{R}^n

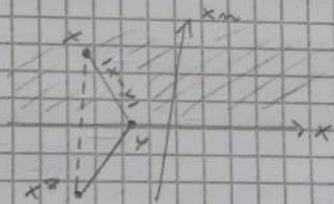
Caso semispazio di \mathbb{R}^n .

$$\mathbb{R}_+^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \quad x = (x', x_n) : \begin{array}{l} x' \in \mathbb{R}^{n-1} \\ x_n > 0 \end{array} \right\}$$



Calcoliamo $G(x, y) = P(x, y) - \phi(x, y)$
in \mathbb{R}^n per $n \geq 3$ la P era

$$P(x, y) = \frac{1}{(n-2) \omega_n |x-y|^{n-2}}$$



Ma x^* il giro riflesso di x
cioè $x = \begin{pmatrix} x' \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow x^* = \begin{pmatrix} x' \\ -x_n \end{pmatrix}$

Per $y = \begin{pmatrix} y' \\ 0 \end{pmatrix}$ si ha $\frac{|x-y|^2}{(x'-y')^2 + x_n^2} = \frac{|x^*-y|^2}{(x'-y')^2 + (-x_n)^2}$

\Rightarrow la Δ di Green sul semispazio è

$$G(x, y) = \frac{1}{(n-2) \omega_n} \left\{ \frac{1}{|x-y|^{n-2}} - \frac{1}{|x^*-y|^{n-2}} \right\}$$

che è una funzione armonica, che soddisfa
in x^* una l.v. di \mathbb{R}_+^n

Il metodo usato per arrivare è detto metodo delle immagini.

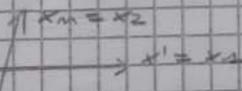
perché x^* è come la carica che annulla il
potenziale alle frontiere

In \mathbb{R}^2 :

$$G(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \left\{ \ln|x-y| - \ln|x^*-y| \right\} =$$

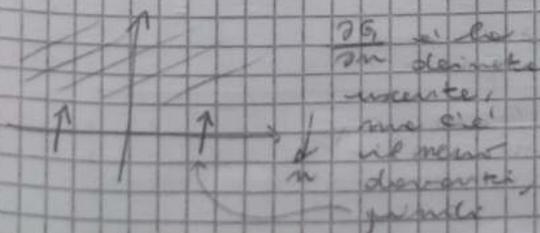
$$= -\frac{1}{4\pi} \left\{ \ln \left[\frac{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}{(x_1-y_1)^2 + (x_2+y_2)^2} \right] \right\}$$

funzione di Green nel semispazio



Calcoliamo $\text{ker}(P_{ii})$:

$$P(x, \sigma) = -\frac{\partial G}{\partial n}(x, \sigma) = \left[\frac{\partial G}{\partial y_n} G(x, y) \right]_{y=(\sigma, 0)} =$$



$\frac{\partial G}{\partial n}$ si ha
in Δ derivata
normale,
ma sic
il normale
in Δ derivata
normale

$$\frac{\partial}{\partial y_n} \left(\frac{1}{|x-y|^{n-2}} \right) = \frac{(2-n)}{|x-y|^{n-1}} \cdot \frac{y_n - x_n}{|x-y|}$$

$$= \Big|_{y_n=0} \frac{(n-2) + n}{|x-y|^n}$$

perché $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r^{n-2}} \right)$
cancel

$$\frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{1}{|x^* - y|^{n-2}} \right) = \frac{2-n}{|x^* - y|^{n-1}} \frac{x_m + y_m}{|x^* - y|} = \frac{(2-n)x_m}{|x^* - y|^n}$$

per $x^* = 0, |x^* - y| = |x - y|$

$$\Rightarrow P(x, \sigma) = \frac{2x_m}{\omega_n |x - y|^n} = \frac{2x_m}{\omega_n (x_1 - \sigma)^2 + x_m^2} \omega_n^{n/2}$$

(perché $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} \sigma \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$)

Nota (Poisson) nel semispazio
per $n=2$

Es. Per $n=2$ ($\omega_n = 2\pi$) controllare che vale

$$P(x, \sigma) = \frac{x_2}{\pi ((x_1 - \sigma)^2 + x_2^2)} = \frac{y}{\pi ((x - \sigma)^2 + y^2)}$$

che era quello che avevamo trovato

Dunque, per n-aria } $\Delta u = 0$
 rischiera } $u(x', 0) = f(x')$ / \mathbb{R}^n_+
 $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$\Rightarrow u(x', x_n) = \frac{2x_n}{\omega_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{f(\sigma)}{(|x' - \sigma|^2 + x_n^2)^{n/2}} d\sigma$$

Formula integrale di Poisson nel semispazio di \mathbb{R}^n , per $n \geq 3$ (ma coerente per $n=2$).

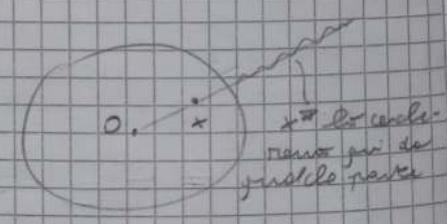
Ci so' qui sempre anche con la teoria di Fourier ma e' piu' difficile trasformare.

Caso sfera di \mathbb{R}^n .

Sia $B_R(0)$ la sfera: $B_R(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq R\}$
 vogliamo trovare

$$G(x, y) = P(x - y) - \varphi(x, y)$$

per cui qui sopra il numero delle dimensioni: dove collocare una ceca x^* affacciata o rivolta al posteggi della sup della sfera?



Si usa l'inversione sferica:

$$x^* = x \cdot \frac{R^2}{|x|^2} \quad \left(\begin{array}{l} |x^*| = R \\ |x^*| = R \end{array} \right)$$

Si dimostra che se $y \in \partial B_R(0)$ allora il rapporto

$$\frac{|x^* - y|}{|x - y|} \text{ e' costante (} \perp \text{ da } \varphi, \text{ ma varia con } x \text{)}$$

è tale che $\frac{|x^* - y|^2}{|x - y|^2} = \left(\frac{R^2}{|x|^2} \right)$ $\forall y \in B_R(0)$

Questo suggerisce di fare:

$$G(x, y) = \frac{1}{\omega_n (n-2)} \left\{ \frac{1}{|x - y|^{n-2}} - \left(\frac{R}{|x|} \cdot \frac{1}{|x^* - y|} \right)^{n-2} \right\}$$

In effetti:

$G(x, y) = 0$ per $y \in B_R(0)$

ha nodi per $x = x^*$ ma x^* è fuori da dove $\in \mathbb{R}^n$.
 quindi è armonica e lineare.

quella dell'armonia per $x \neq 0$ mentre (dal limite)

$$G(0, y) = \frac{1}{\omega_n (n-2)} \left\{ \frac{1}{|y|^{n-2}} - \frac{1}{R^{n-2}} \right\}$$

questa è la formula di Green per la sfera in \mathbb{R}^n con $n \geq 3$.

E ora si può calcolare il $\text{ker}(P_{n,i})$:

$$P(x, \sigma) = - \frac{\partial G(x, y)}{\partial n} \Big|_{y=\sigma \in \partial B_R(0)}$$

$$P(x, \sigma) = \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R |x - \sigma|^m}$$

$\text{ker}(P_{n,i})$ è la sfera in $\mathbb{R}^n, n \geq 3$

il calcolo è più facile per \mathbb{R}^2 , ma non si possono neanche in questi casi, perché sono simmetriche e convergono. Ma per la situazione, il $\text{ker}(P_{n,i})$ è un cerchio.

$x \in B_R(0)$ \Rightarrow si osserva che $P(x, \sigma) > 0$
 $\sigma \in \partial B_R(0)$

E si può dimostrare che

$$\int_{\partial B_R(0)} P(x, \sigma) d\sigma = 1 \quad \text{ker}(P_{n,i})$$

Per la sfera centrata in x_0 ($B_R(x_0)$) si ha

$$P(x, \sigma) = \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{\omega_n R |x - \sigma|^m}$$

Def. $\forall g \in C^0(\partial B_R(x_0))$ la funzione

$$u(x) = \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{\omega_n R} \int_{\partial B_R(x_0)} \frac{g(\sigma)}{|x - \sigma|^m} d\sigma$$

Proprietà:

- 1) $u \in C^\infty(B_R(x_0))$
- 2) $\Delta u = 0$ in $B_R(x_0)$
- 3) $u(x) \xrightarrow{x \rightarrow \sigma \in \partial B_R(x_0)} g(\sigma)$

onde si ha $\left. \begin{array}{l} \Delta u = 0 \text{ in } B_R(x_0) \\ u = g \text{ in } \partial B_R(x_0) \end{array} \right\}$

1) il denominatore dell'integranda è sempre discosto da 0 \Rightarrow si usa il teo di denominatore sotto il segno di \int

2) allora si osserva che (dal teo di Denominatore sotto \int) segue dal teo di Poisson

$$P(x, \sigma) = - \left(\nabla_x G(x, y) \cdot \frac{x - \sigma}{|x - \sigma|^m} \right) \Big|_{y=\sigma \in \partial B_R(x_0)}$$

$$\Delta_x P(x, \sigma) = - \nabla_x \left(\Delta_x G(x, y) \right) \cdot m = 0 \text{ perché } G \text{ è h.a.}$$

e si vede anche che $\Delta_x G(x, y) = 0$

(3) Il fatto che $u(x) \rightarrow \text{cost}$ per $x \rightarrow \infty$ è dimostrato
 in modo analogo alle tecniche usate nel caso
 del cerchio, usando la proprietà che
 $P(x, \sigma) > 0 \quad \int_{\partial B_R(x_0)} P(x, \sigma) d\sigma = 1 \quad \forall x \in B_R(x_0)$

Proprietà generale delle funzioni armoniche
 (teorema di Poisson).

06/03

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, $u \in C^2(\Omega)$ tale che $\Delta u = 0$ in Ω .
 Sia $B_R(x_0) \subset \Omega$. Allora vale che

$$(1) \quad u(x_0) = \frac{1}{\omega(B_R(x_0))} \int_{B_R(x_0)} u(y) dy = \frac{1}{\omega(B_R(x_0))} \int_{\partial B_R(x_0)} u(y) dy$$

media
integrabile

$$= \frac{1}{\omega(B_R(x_0))} \int_{\partial B_R(x_0)} u(y) dy$$

$$(2) \quad u(x_0) = \frac{1}{\omega(\partial B_R(x_0))} \int_{\partial B_R(x_0)} u(\sigma) d\sigma = \frac{1}{\omega(\partial B_R(x_0))} \int_{\partial B_R(x_0)} u(\sigma) d\sigma$$

$$= \frac{1}{\omega(\partial B_R(x_0))} \int_{\partial B_R(x_0)} u(\sigma) d\sigma$$

in calcolo al
centro dello sfere



Dim. Proviene da (2).

Per $0 < h \in \mathbb{R}$ chiamiamo

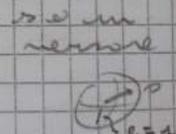
$$f(h) = \frac{1}{\omega(\partial B_h(x_0))} \int_{\partial B_h(x_0)} u(\sigma) d\sigma$$

Mostriamo che è costante.

Proviamo (non è necessario calcolarlo), per trovare $f(h)$.

Carlo di variabili: $\left\{ \begin{array}{l} \sigma = x_0 + r\omega \\ \Rightarrow \sigma \in \partial B_r(x_0) \Rightarrow r \in \partial B_1(0) \\ d\sigma = r^{n-1} d\omega \end{array} \right\}$

$$\Rightarrow f(h) = \frac{1}{\omega(\partial B_h(x_0))} \int_{\partial B_h(x_0)} u(x_0 + r\omega) (r^{n-1} d\omega)$$

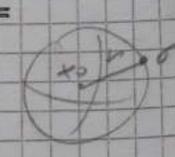


ora deriviamo

$$f'(h) = \int_{\partial B_h(x_0)} \nabla u(x_0 + r\omega) \cdot \frac{\sigma}{h} d\sigma \cdot \frac{1}{\omega(\partial B_h(x_0))} = \left\{ \begin{array}{l} \text{accade} \\ \text{e no} \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{\omega(\partial B_h(x_0))} \int_{\partial B_h(x_0)} \nabla u(\sigma) \cdot \left(\frac{\sigma - x_0}{h} \right) d\sigma =$$

$$= \frac{1}{\omega(\partial B_h(x_0))} \int_{\partial B_h(x_0)} \underbrace{\nabla u(\sigma) \cdot \frac{\sigma - x_0}{h}}_{\Delta u = 0} d\sigma = 0$$



$\Rightarrow f(r)$ è costante, e

$$f(r) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(h) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\omega(\partial B_h(x_0))} \int_{\partial B_h(x_0)} u(\sigma) d\sigma = u(x_0)$$

$$\left| \frac{1}{\omega(\partial B_h(x_0))} \int_{\partial B_h(x_0)} u(\sigma) d\sigma - u(x_0) \right| = \left| \int_{\partial B_h(x_0)} [u(\sigma) - u(x_0)] d\sigma \right| \leq$$

$$= \int_{\partial B_h(x_0)} |u(\sigma) - u(x_0)| d\sigma$$

= $f(h)$ per
generalizzazione di
della costante

u è continua in x_0 ($|x-x_0| = h$)
 $\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta: \forall x \in B_\delta(x_0) \quad |u(x) - u(x_0)| < \epsilon$

$f(h) = f(x)$ $\forall x \in (x_0 - h, x_0 + h)$
 \Rightarrow manda il δ da entrambi i lati

Per il η (2)

$$u(x_0) = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R(x_0)} u(y) dy$$

calcolando in
eventi uguali

$$= \int_0^R \left(\int_{\partial B_\rho(x_0)} u(\sigma) d\sigma \right) d\rho =$$

da cui la η
risultando

$$\left(\frac{d}{d\rho} \int_{\partial B_\rho(x_0)} u(\sigma) d\sigma \right) = u(x_0) \omega_n \rho^{n-1} \omega_n$$

$$= \int_0^R u(x_0) \omega_n \rho^{n-1} d\rho = u(x_0) \omega_n \frac{R^n}{n}$$

Conseguenze.
Teorema (Massimo del massimo forte).

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio (aperto connesso), e sia $u \in C^0(\bar{\Omega})$ che soddisfa le condizioni di Dirichlet del teorema precedente.
 (per esempio $u \in C^2(\Omega): \Delta u = 0$ in Ω).

Allora se u assume un max/min assoluto in Ω , la u è costante.

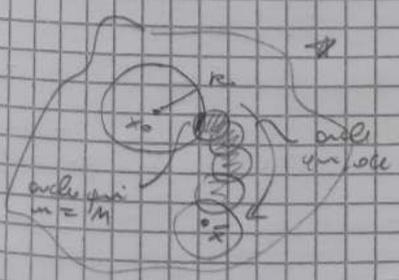
In particolare, se Ω è un dominio limitato e $u \in C^0(\bar{\Omega})$
 \Rightarrow da Maximin con AVI la u assume max e min assoluti in $\bar{\Omega}$ (chiuso e limitato).

Allora i max/min assoluti di u sono assunti sul bordo $\partial\Omega$, e solo lì sul bordo $\partial\Omega$ e non che u sia costante. Cioè!

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)| = \max_{x \in \partial\Omega} |u(x)|$$

Dim. Sia ad es. $x_0 \in \Omega$ un pt di max assoluto. Come $u(x_0) = M \geq u(x) \forall x \in \Omega$

Proviamo allora che $u(x) = M \forall x \in \Omega$.



Sia $r > 0: B_r(x_0) \subset \Omega$

Proviamo che $u(x) = M \forall x \in B_r(x_0)$, cioè nella sfera.

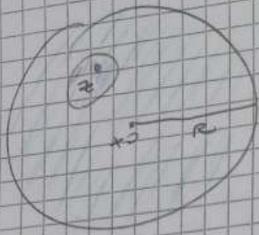
Mostriamo che da queste segue $u(x) = M$ in tutto Ω .

Sia $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ prolungare oltre Ω , usando la connessione di Ω .

Per la connessione \exists perc curva, e per proprietà invarianza di rispetto a tutto Ω .

Per esempio, $\exists \gamma \in B_r(x_0): u(\gamma) = M$. Ma $u \in C^0$, cioè!

risultando che per ogni pt $x \in \Omega$ $u(x) = M$ strettamente allora aparte per la connessione \exists in interior $u(x)$ con quelle caratteristiche



u e continua generali
 $\exists B_r(z) \subseteq B_r(x_0) \text{ t.c.}$
 $u(z) = M \quad \forall x \in B_r(z)$

Per la proprietà di nesso

$$u(x_0) = M = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_r(x_0)} u(x) dx$$

$$= \frac{1}{\omega_n R^n} \left\{ \int_{B_r(z)} u(x) dx + \int_{B_r(x_0) \setminus B_r(z)} u(x) dx \right\}$$

$\underbrace{\int_{B_r(z)} u(x) dx}_{= M \cdot \gamma(B_r(z))} + \int_{B_r(x_0) \setminus B_r(z)} u(x) dx \stackrel{MEM}{=} \int_{B_r(x_0) \setminus B_r(z)} u(x) dx$

$$\Rightarrow \frac{1}{\omega_n R^n} M (\gamma(B_r) + \gamma(B_r \setminus B_r)) =$$

$$= \frac{1}{\omega_n R^n} M \left(\frac{\omega_n R^n}{\omega_n R^n} \right) = M \Rightarrow M \leq M, \text{ quindi}$$

\Rightarrow vale la catena di uguaglianze \square

Cor. Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ dominio limitato. Allora la r.l.z. di u in D è uguale a $\frac{1}{\omega_n R^n} \int_{D \cap B_r(x_0)} u(x) dx$ nella classe $C^2(\bar{D}) \cap C^0(\bar{D})$ se \exists, e' unica.

abbiamo mostrato la versione del t.l.v. di unicità, perché per la parte di esistenza (non nec. Lips) per la parte $u \in C^0(\bar{D})$ (non nec. $C^2(\bar{D})$)

Completare il t.l.v. di u , non è \exists

Dim. Se $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ sono r.l.z. dello stesso problema allora

$$u := u_1 - u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \text{ e vale } \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

• $\Delta u = 0$ in $\Omega \Rightarrow u$ ha la proprietà di armonicità

• Ω limitato, $u \in C^0(\bar{\Omega})$ e u ha la proprietà

$$\Rightarrow \max_{\bar{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u| = 0 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow u_1 = u_2 \Rightarrow \square$$

Cor. (teorema di stabilità).

Sia D un dominio limitato, e $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ r.l.z. dello stesso problema

$$\begin{cases} \Delta u_1 = f_1 & \text{in } \Omega \\ u_1 = g_1 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta u_2 = f_2 & \text{in } \Omega \\ u_2 = g_2 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Con $f_1, f_2 \in C^0(\bar{\Omega})$. Allora

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} |u_1 - u_2| = \max_{x \in \bar{\Omega}} |f_1 - f_2|$$

Dim. $u := u_1 - u_2$ vale il problema

$$\begin{cases} \Delta u = f_1 - f_2 & \text{in } \Omega \\ u = g_1 - g_2 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \Rightarrow u \text{ r.l.z.}$$

È del t.l.v. di prima specie

$$\max_{\bar{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |g_1 - g_2| \quad \square$$

Combinando il teo di media e la formula integrale di Poisson si ottiene un. con la la sfera in \mathbb{R}^n allora

$f \in C^0(\partial B_R(x_0))$ la funzione
 $u(x) = \int_{\partial B_R(x_0)} P(x, \theta) f(\theta) d\sigma$

è l'unica (1) $\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0 \\ u = f \end{array} \right. / \begin{array}{l} B_R(x_0) \\ \partial B_R(x_0) \end{array}$

e questa $u \in C^\infty(B_R(x_0))$

Cor. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $u \in C^2(\Omega)$: $\Delta u = 0$ in Ω , allora

u è regolare della forma armonica.

Dim. Sia $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$, e sia v la $\left\{ \begin{array}{l} \Delta v = 0 \\ v = u \end{array} \right. / \begin{array}{l} B_R \\ \partial B_R \end{array}$

Allora $\Rightarrow \exists!$ v reg. e $v \in C^\infty(B_R)$, e $v = u$ in ∂B_R .
 Ma anche u soddisfa (e reg.) il problema.

- \Rightarrow per il unicità segue (o per es.) $u = v$ in $B_R(x_0)$
- $\Rightarrow u \in C^\infty(B_R(x_0))$, perché $v \in C^\infty$ perché reg., e $u = v$
- $\Rightarrow u \in C^\infty(\Omega)$ per l'arbitrarietà della sfera $B_R(x_0)$. \square

Ex. 2 Questa richiesta viene con senza per un altro:

Regolarità inverso della formula di media.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $u \in C^0(\Omega)$ e supponiamo che u soddisfa la formula di media in Ω . Allora

$\Rightarrow u \in C^\infty(\Omega)$ e $\Delta u = 0$.

Dim. Sia $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$ e sia v la $\left\{ \begin{array}{l} \Delta v = 0 \\ v = u \end{array} \right. / \begin{array}{l} B_R \\ \partial B_R \end{array}$

Se v è armonica \Rightarrow soddisfa la formula di media.
 Se u (per lip) soddisfa anche la formula di media.

Allora $\Rightarrow v - u \in C^0(\overline{B_R})$ che soddisfa la fdm,
 e quindi soddisfa il pr. del max:

$$\max_{\overline{B_R}} |v - u| = \max_{\partial B_R} |v - u| = 0$$

= 0 correggi maggiori

perché $v = u$

- $\Rightarrow u(x) = v(x)$ in $B_R(x_0)$
- $\Rightarrow u \in C^\infty(B_R)$ e $\Delta u = 0$ in B_R

\Rightarrow per la generalità di B_R , u è reg. in tutto Ω . \square

Quindi: $u \in C^0(\Omega)$ soddisfa $\Leftrightarrow \Delta u = 0$ in Ω
 le fdm in Ω e $u \in C^\infty(\Omega)$ \parallel

*risultato molto potente. dall'uguaglianza
 integrale della formula segue $u \in C^\infty$*

Conseguenze della regolarità delle linee curve.

Cor. Sia $u \in C^2(\Omega)$: $\Delta u = 0$, con Ω aperto.
 Allora qualsivoglia derivata di u è armonica in Ω .

Dim. $\Delta \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} (\Delta u) = 0$

\Rightarrow vale il teo., inverso e derivata \square

e lo ∇ iterare a ogni ordine. \square

Teorema (di Liouville)

Sia u una funzione: $\Delta u = 0$ (armonica) su tutto \mathbb{R}^n .
 Se u è limitata allora u è costante.

Dim. Poiché u è \mathcal{H} anche la sua derivata ∇u è (del tipo) su tutto \mathbb{R}^n .
 E' il primo modo per la formula di mezzo, e' l'elemento
 e $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ su qualunque $B_R(x_0)$:
 divergenza nella derivata
 componente x_i
 come i del
 vettore ∇u

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0) = \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{B_R(x_0)} \frac{\partial u}{\partial x_i}(y) dy = \int_{\partial B_R(x_0)} u(y) \cdot \nu_i dy$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0) \right| = \left| \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{\partial B_R} u(y) \nu_i dy \right| \leq \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{\partial B_R} |u(y)| dy \leq C \cdot \frac{n}{\omega_n R^n} (\omega_n R^{n-1}) = \frac{Cn}{R}$$

volendo $R > 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0) = 0$$

Ma x_0 e' scelto $\in \mathbb{R}^n$ quindi

$$\nabla u = 0 \Rightarrow u \text{ e' costante in } \mathbb{R}^n \quad \square$$

Segue dal teo u :

Criterio di Liouville per il quale si dice che nel reciproco, nella classe delle \mathcal{H} limitate.

MODELLI DI DIFFUSIONE

Generalmente modelli di evoluzione (col tempo t),

Diffusione del calore in un mezzo continuo, da $t=0$ iniziale e' la temperatura nel mezzo:

$$u(x,t) \text{ con } x \in \mathbb{R}^n \text{ (} n=1,2,3 \text{ spaziali)}$$

Scegliamo un'eq di bilancio energetico.

Antidiffusione la $t=0$

$$e(x,t) : \text{densita' di energia termica}$$

Viola la 1^a legge: $e(x,t) = c \cdot u(x,t)$.

Allora al tempo t l'entropia di massima dell'energia termica totale in una certa regione del mezzo $V \subseteq \mathbb{R}^n$ e' $t=0$, e':

$$\frac{d}{dt} \int_V e(x,t) \rho(x,t) dx = \frac{d}{dt} \int_V c \cdot u(x,t) \cdot \rho(x,t) dx = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (c \cdot \rho \cdot u) dx$$

Q case sono uguali?

$\rho(x,t)$: temperatura estensione di densita' di calore

$\int_V v(x,t) \rho(x,t) dx =$ tempo interazione di momento del er. tensor prodotta rotazionale

E per ottenere un:

$f(x,t)$: derivata di flusso tensor

$$-\int_{\partial V} g(x,t) \cdot n e \, d\sigma = -\int_V \nabla \cdot g(x,t) \, dx$$

In totale abbiamo:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho v) \, dx = \int_V \rho v \, dx - \int_V \nabla \cdot g \, dx$$

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho v) - \rho v + \nabla \cdot g \right] (x,t) \, dx = 0$$

Ma deve essere vero \forall regione V , quindi deve essere nulla l'integrale:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v) - \rho v + \nabla \cdot g = 0$$

Incompete: u e il flusso g . Restano solo u .
 Stazionari come trattare g .

Da cosa dipende la corrente tensor g ?
 Le due fenomeni:

1. Diffusione del calore $g = -k \nabla u$

$k > 0$: coeff di conducibilità termica

u in funzione di temp \rightarrow flusso del calore al bordo

2. Convezione. $g = c v u$

v : velocità del mezzo che fluisce. Ma conviene un dato.

Quindi potremmo scrivere

$$\begin{aligned} \nabla \cdot g &= \nabla \cdot (-k \nabla u + c_1 v u) = \nabla \cdot (c_1 v u) \text{ se } v \text{ e } c_1 \text{ costanti} \\ &= -k \Delta u + c_1 v \cdot \nabla u \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v) - \rho v - k \Delta u + c_1 v \cdot \nabla u = 0$$

(se c e ρ costanti) $c \rho \frac{\partial u}{\partial t} - k \Delta u + c_1 v \cdot \nabla u = \rho v$

($\cdot 1/c\rho$) $\frac{\partial u}{\partial t} - \left(\frac{k}{c\rho}\right) \Delta u + \frac{c_1}{c} v \cdot \nabla u = \left(\frac{v}{c}\right)$
 D : coeff di diffusione

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} - D \Delta u + b \cdot \nabla u = f$$

temperatura, velocità/potenziale di calore

diffusione / trasporto/convezione

in altre con eqn del calore trattando

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D \Delta u = \begin{cases} 0 \\ f \end{cases}$$

Come è il spazio e complessioni:
 - se il campo non è omogeneo al posto di Δu

$$\Delta (h(x) u) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(h(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \quad \text{o anche } h = h(x,t)$$

- se il potenziale non è isotropico al posto di Δu
 $\underline{g} = -h \Delta u$
 $\underline{g} = -A(x) \Delta u$

con A matrice simmetrica e def. pos., quindi omogeneo
 $\sum_{i,j} (a_{ij}(x,t) u_{x_i})_{x_j}$

Stendere un reticolo il caso isotropico delle eq. in generale, cioè:

$$Lu = \sum_i (a_{ij}(x) u_{x_j})_{x_i} + \sum_j b_j(x) u_{x_j} + cu = f$$

Come lo stesso modello può descrivere anche

- la diffusione di una sostanza disciolta in un solvente, con

$u(x,t)$: concentrazione ret. in x al tempo t

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D \Delta u + \underline{b} \cdot \nabla u + cu = f \quad \text{rispetto}$$

diffusione (coefficiente D)
trasporto (coefficiente \underline{b})
coeff. di reazione chimica (decomposizione)

o concentrazioni nulla verso est del colore

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D \Delta u = f \quad \text{(rispetto)}$$

07/03

Esposizione del colore.

$$D \in \mathbb{R}^+, \tau \in [0, T], x \in \mathbb{R}^m$$

L'operatore $H(u) := \frac{\partial u}{\partial t} - D \Delta u$ è detto operatore del colore.

Proprietà di H :

- è invariante per traslazioni:

$$H[u(x+x_0, t+t_0)] = H(u)(x+x_0, t+t_0) \quad \text{anche: } \text{traslazioni in } t \text{ e } x$$

x_0, t_0 costanti. In realtà vale l'operatore e coeff. costanti.

Se $Hu = 0$ allora anche v : $Hv = 0$ con v la traslazione di u .

- $Hu(-x, t) = (Hu)(-x, t)$, quindi se $Hu = 0$ allora anche $H(u(-x, t)) = 0$.

mentre per riflessione temporale:

$$H(u(x, -t)) = - \left(\frac{\partial u}{\partial t} + D \Delta u \right) (x, -t) \quad \text{(se } Hu = 0 \text{ allora)}$$

quindi $v(x, t) = u(x, -t)$ soddisfa un'altra eq.:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + D \Delta v = 0$$

con coefficiente costante

la temperatura è nulla alla base del tempo

è detta iniettiva: epi del colore alle indietro (retrograda)
 $\delta(u(x)) = \gamma^2(\delta u)(x)$ (270).

Caso δ è detto omogeneo di grado 2. Mentre H :

$$H(u(x, x^2 t)) = x^2 (Hu)(x, x^2 t)$$

dilatazione detta "parabolica"

Quali sono i valori al contorno / valori iniziali che è naturale studiare per il epi del colore?

è u epi di evoluzione \Rightarrow ha senso studiare p.e.c., con il valore iniziale della u

(1) Problema di Cauchy globale (su tutto \mathbb{R}^n)

$$\begin{cases} Hu = f \\ u(x, 0) = p(x) \end{cases} \quad \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ x \in \mathbb{R}^n, t = 0 \end{array}$$

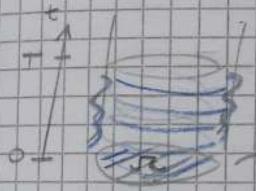
qui H in "contorno" allora δu su \mathbb{R}^n

(2) su $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n$ in dom limitato.

$$\begin{cases} Hu = f \\ u(x, 0) = p(x) \end{cases} \quad \begin{array}{l} (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T) \\ x \in \mathbb{R}, t = 0 \end{array}$$

+ condizioni al contorno per $x \in \mathbb{R}$ e $t \in (0, T)$ di Dirichlet / Neuman / Robin

Conviene in dominio $\mathbb{R} \times (0, T) := \Omega_T$, detto cilindro.



qui sul lavoro del cilindro cerchiamo le condizioni al contorno

qui condizioni iniziali

La frontiera parabolica di Ω_T è indicata con $\partial_p \Omega_T$ e resale è intesa:

$$\partial_p \Omega_T = \{ \mathbb{R} \times \{0\} \} \cup \{ \mathbb{R} \times (0, T) \}$$

con le base del cilindro e la sup laterale.
 Si riconosce del tipo di condizioni al contorno potremmo avere:

- quali di Cauchy-Dirichlet

$$\begin{cases} Hu = f \\ u(x, t) = h(x, t) \\ u(x, 0) = p(x) \end{cases}$$

$x \in \mathbb{R}, t \in (0, T) \in \Omega_T$
 $x \in \mathbb{R}, t \in (0, T)$
 $x \in \mathbb{R}$

una versione

$$\begin{cases} Hu = f \\ u = \eta \end{cases} \quad \begin{array}{l} \Omega_T \\ \partial_p \Omega_T \end{array}$$

temp al lavoro temp intra

- quali di Cauchy-Neuman

$$\begin{cases} Hu = f \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = h(x, t) \\ u(x, 0) = p(x) \end{cases}$$

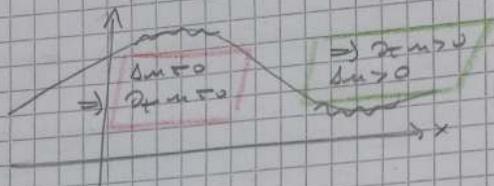
Ω_T
 $x \in \mathbb{R}, t \in (0, T)$
 $x \in \mathbb{R}$

si nota il flusso di calore sulle frontiere laterali

principio di massimo debole \Rightarrow il epi del colore.

$$Hu = \frac{\partial u}{\partial t} - D \delta u = 0$$

Se u è un certo estante t il profilo di $u(x,t)$ è così



u è monotona in x

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D^2 u$$

$\Rightarrow \partial_t u$ è su u lungo lo stesso segno

Però, siccome u è monotona in x , u è max in $x=1$ e min in $x=0$.

Quindi u è la classe di funzioni ammissibili per la relazione di confronto di Carathéodory in un cilindro?

Vedremo che

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists u, u_{\min}, u_{\max}, u_t \in C^0(\bar{Q}_T) \\ u \in C^0(\bar{Q}_T) \text{ per la } \text{relazione di Carathéodory} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^0(\bar{Q}_T)$$

(perché $C^{2,1}$ in Q_T e C^0 in \bar{Q}_T)

Una proprietà di massimo per l'operatore del calore!

Sia $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^0(\bar{Q}_T)$ con $Q_T = \mathbb{R} \times (0,T)$, \mathbb{R} con limitato e \mathbb{R}^n .

Se $\Delta u \leq 0$ in Q_T allora il massimo di u è confermato in $\partial_p Q_T$

(in \bar{Q}_T) $C^0 \Rightarrow$ esiste \max in \bar{Q}_T

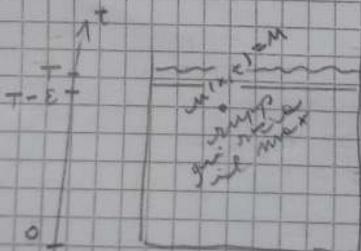
Se $\Delta u \geq 0$ in Q_T allora il minimo di u è confermato in $\partial_p Q_T$ (casi simmetrico).

Se $\Delta u = 0$ in Q_T allora u assume max e min sulla frontiera e vale che

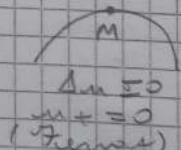
$$\max_{(x,t) \in \bar{Q}_T} |u(x,t)| = \max_{(x,t) \in \partial_p Q_T} |u(x,t)|$$

Dim. (Coro 5.0). Se $u \geq 0$ segue da 5.0 applicando u e $-u$. E da 5.0 segue da 3.0 e 5.0 insieme. Caratteristiche 1, 2, 3.

Supponiamo che $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^0(\bar{Q}_T)$ e $\Delta u \leq 0$. Proviamo che max della u è confermato su $\partial_p Q_T$.



supponiamo che u sia max all'interno



$$\Delta u = u_t - D^2 u \geq 0$$

(perché u è max in Q_T)

Sia $u_\varepsilon(x,t) = u(x,t) - \varepsilon t$, $\varepsilon > 0$

$$\Rightarrow \Delta u_\varepsilon = \Delta u - \varepsilon \Delta t = \Delta u - \varepsilon \leq -\varepsilon < 0$$

Considera la u_ε sul cilindro $\mathbb{R}^n \times (0, T-\varepsilon)$, per cui
 quindi della curva all'estremità.
 di u_ε è demontabile allora.

Perché il max assoluto di u_ε su $\overline{Q_{T-\varepsilon}}$ è assunto
 in $\partial_p Q_{T-\varepsilon}$.

Per questo, sia $M = u_\varepsilon(x_0, t_0)$ con $(x_0, t_0) \in \overline{Q_{T-\varepsilon}} \cup \mathbb{R}^n \times \{T-\varepsilon\}$

$$H_{u_\varepsilon} = \frac{\partial^2 u_\varepsilon(x, t)}{\partial t^2} - \Delta u_\varepsilon(x, t)$$

$$= 0 \text{ da Formata}$$

$$\Rightarrow 0 > H_{u_\varepsilon} \geq 0 \text{ ma assurdo}$$

*si dice max
 ma è in
 qui
 nella
 qui*

Movete il con del max sul cilindro, cioè su $\mathbb{R}^n \times \{T-\varepsilon\}$

*in questo max non
 vale più Formata
 ma compare
 il ∂_t^2
 all'estremità*

$$H_{u_\varepsilon} = \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2} - \Delta u_\varepsilon$$

$$\Rightarrow \text{compare } \partial_t^2 \text{ e } \Delta u_\varepsilon$$

*non vale più da $\partial_t^2 = 0$ da
 Formata, ma il compare ∂_t^2 nella max*

Dunque: $\max_{\overline{Q_{T-\varepsilon}}} u_\varepsilon = \max_{\partial_p Q_{T-\varepsilon}} u_\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

$u_\varepsilon(x, t) \rightarrow u(x, t)$, uniformemente in $\overline{Q_T}$, poiché $u \in C^0(\overline{Q_T})$

$\Rightarrow \max_{\overline{Q_T}} u = \max_{\partial_p Q_T} u$

In particolare, se $H_u = 0$ su $\overline{Q_T}$

$\max_{\overline{Q_T}} |u| = \max_{\partial_p Q_T} |u|$

*valore cal |u|
 cioè, prima era
 praticamente zero
 il massimo*

Così si dice un:

Teorema (di esistenza) per problema di Cauchy-Dirichlet.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dominio limitato, $Q_T = \Omega \times (0, T)$. Nella
 classe di $u \in C^{2,1}(\overline{Q_T}) \cap C^0(\overline{Q_T})$ la soluzione del
prob di Cauchy-Dirichlet

$$\begin{cases} H_u = f & | \overline{Q_T} \\ u = g & \partial_p Q_T \end{cases} \quad \text{se } \exists, \text{ è unica}$$

Dim. Se u_1, u_2 in quella classe risolvono lo
 stesso prob, allora se sottraiamo le due

$$u = u_1 - u_2$$

$$\text{e } \text{ret di } \begin{cases} H_u = 0 & | \overline{Q_T} \\ u = 0 & \partial_p Q_T \end{cases}$$

Ma se $H_u = 0$ allora $\Rightarrow \max_{\overline{Q_T}} |u| = \max_{\partial_p Q_T} |u| = 0$

\Rightarrow le $u = 0$ in $\overline{Q_T}$
 $\Rightarrow u_1 = u_2. \square$

Consegue, che il max di u è assunto su $\partial_p Q_T$
 invece in particolare che

$$\begin{cases} \text{se } u \leq 0 & \partial_p Q_T \Rightarrow u \leq 0 \text{ all su } \overline{Q_T} \\ \text{(e } H_u \leq 0) \end{cases}$$

Teorema (di confronto). Conseguenza

Siano $u_1, u_2 \in C^{2,1}(\overline{Q_T}) \cap C^0(\overline{Q_T})$ tal che

$$\begin{cases} H_{u_1} \geq H_{u_2} & | \overline{Q_T} \\ u_1 \geq u_2 & \partial_p Q_T \end{cases}$$

allora $\Rightarrow u_1 = u_2$ in Ω_T .
 Dim. Applico il principio di massimo su $u_2 - u_1$, da qui.

Conseguenza / Teorema (strumento di stabilità).
 Siano $u_1, u_2 \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^0(\bar{\Omega}_T)$ soluz di

$$\begin{cases} \Delta u_i = f_i & \text{in } \Omega_T \\ u_i = g_i & \text{su } \partial p \Omega_T \end{cases} \quad i=1,2$$

$$\max_{(x,t) \in \bar{\Omega}_T} |u_1 - u_2| \leq \max_{\partial p \Omega_T} |g_1 - g_2| + T \max_{\bar{\Omega}_T} |f_1 - f_2|$$

che è un risultato forte, stabilito con un solo
 passo solo $f_1 \neq f_2$

Dim. È suff. con le soluz $\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega_T \\ u = g & \text{su } \partial p \Omega_T \end{cases}$ allora vale

$$\max_{\bar{\Omega}_T} |u| \leq \max_{\partial p \Omega_T} |g| + T \max_{\bar{\Omega}_T} |f| \quad (1.1.1)$$

Da cui per linearità regna la stessa della tesi, notatamente a in la $u_1 - u_2$.
 Ma il tlm è notevole perché vale anche se con non
 lineari.

Inoltre se u è soluz di $\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega_T \\ u = g & \text{su } \partial p \Omega_T \end{cases}$

allora posso per linearità
 (principio di sovrapposizione)
 vale che:

$$\text{con la scelta di } \begin{cases} u := v + w \\ \Delta v = f & \text{in } \Omega_T \\ v = 0 & \text{su } \partial p \Omega_T \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta w = 0 & \text{in } \Omega_T \\ w = g & \text{su } \partial p \Omega_T \end{cases}$$

ho così speso in un problema con
 due multipli g

Per il principio di massimo vale che

$$\max_{\bar{\Omega}_T} |w| = \max_{\partial p \Omega_T} |w| = \max_{\partial p \Omega_T} |g|$$

Per stimare la v usiamo il tlm del q. 1.1.1
 $V(x,t) = t \cdot \max_{\bar{\Omega}_T} |f|$

$$\Delta V = \max_{\bar{\Omega}_T} |f| + \frac{\Delta t}{0} \geq f \quad \text{in } \Omega_T, \text{ dove}$$

$$\begin{cases} \Delta V \geq \Delta v & \text{in } \Omega_T \\ V \geq v & \text{in } \partial p \Omega_T \end{cases} \Rightarrow V \geq v \quad \text{in } \Omega_T \quad (\text{dal tlm})$$

se con v scelta, v scelta
 $v=0$ su $\partial p \Omega_T$

Da cui la stima:

$$v \leq t \cdot \max_{\bar{\Omega}_T} |f| \leq T \cdot \max_{\bar{\Omega}_T} |f|$$

Se ora scegliamo
 $V(x,t) = -t \max_{\bar{\Omega}_T} |f|$

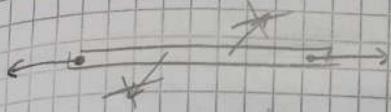
segue che:

$$-v \leq T \max_{\bar{\Omega}_T} |f|$$

$$\Rightarrow \max_{\bar{\Omega}_T} |v| \leq T \max_{\bar{\Omega}_T} |f|$$

da cui venendo
 perché, la tesi \square

allungo grande risultato di ricerca e stabilità per il grad di Cauchy-Darboux e stabilità per il grad non ampiezza, su cilindri di Cauchy. E' del colore per terza norma ep di regolarità su $D_p \Omega_T$.



Il problema limitato di Laplace $\Delta u = 0$ in Ω , con dati laterali $u|_{\partial\Omega} = g$ e $u|_{\partial\Omega} = h$.

Altri per costruire colore solo dopo averci. Sup ma o meno recenti / μ_{xx} di colore. Dunque:

$$\begin{cases} u_t - D u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} x \in (0, l), t > 0 \\ x \in (0, l), t = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{cauchy} \\ \text{condizioni} \\ \text{di Cauchy} \end{array}$$

temperatura nulla agli estremi di Dirichlet

affronto analogo con separazione di variabili.

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t) \quad \text{rel}$$

Introduciamo:

$$X(x) T'(t) = D X''(x) \cdot T(t)$$

$$\frac{T'(t)}{DT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad \text{che deve valere } \forall x \in (0, l) \quad \forall t > 0$$

$$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}: \quad \frac{T'(t)}{DT(t)} = \lambda, \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

(2) $X''(x) = \lambda X(x)$. La fun X è def. su $(0, l)$, ma veniamo che le temp agli estremi sia nulla

$$\Rightarrow \text{imponiamo } X(0) = X(l) = 0$$

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x) \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \quad x \in (0, l)$$

grad agli estremi. Costruiamo una X non nulla.

- se $\lambda > 0$: $X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$ \checkmark ($e^{\sqrt{\lambda}x}, e^{-\sqrt{\lambda}x}$)

$$X(0) = X(l) = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0 \quad \text{putremmo} \\ \Rightarrow X = 0, \text{ non } \checkmark \text{ interesse}$$

- se $\lambda = 0$: $X(x) = c_1 x + c_2$ \checkmark ($x e^{0x}, e^{0x}$) = $\langle x, 1 \rangle$

$$X(0) = X(l) = 0 \Rightarrow \text{ancora } X(x) = 0 \quad \forall x, \text{ non } \checkmark \text{ interesse}$$

- se $\lambda < 0$: $X(x) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x)$ \checkmark ($e^{0 \cos \beta x}, e^{0 \sin \beta x}$)

$$\begin{aligned} X(0) = 0 &\Rightarrow c_1 = 0 \\ X(l) = 0 &\Rightarrow c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}l) = 0 \end{aligned}$$

$c_2 \neq 0$ altrimenti $X = 0$, quindi deve essere $\sin(\sqrt{-\lambda}l) = 0 \Rightarrow \sqrt{-\lambda}l = n\pi$ ($n = 1, 2, \dots$) \checkmark

$$\Rightarrow X(x) = c \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad \lambda = -\frac{n^2 \pi^2}{l^2}$$

(2) $T'(t) = DT(t) \lambda \Rightarrow T'(t) = DT(t) \left(-\frac{n^2 \pi^2}{l^2}\right)$ e rel non :

$$T(t) = C e^{-\frac{n^2 \pi^2}{l^2} D t}$$

La rdt e non separate raso
 $u(x,t) = e^{-\frac{n^2 \pi^2}{l^2} D t} \cdot \cos\left(\frac{n \pi x}{l}\right) \cdot b_n$

Aggi un valore e' eq differenziale e la cond. di
 Dirichlet nulli e calcolare l'esse delle um.
 la raso non e' la cond. iniziale, con una serie
 trigonometrica
 relativa:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{l^2} D t} \cos\left(\frac{n \pi x}{l}\right)$$

non e' la cosa $f(x) = u(x,0) \Rightarrow$ allora

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \cos\left(\frac{n \pi x}{l}\right)$$

Questo e' un sviluppo in serie di Fourier di raso
reli

Essi: il sistema base ortogonale e $(0,l)$ sarebbe
 $\cos\left(n \frac{2\pi}{l} x\right)$ $\cos\left(n \frac{\pi}{l} x\right)$ ha T di ANS

Nella raso della f c' e' un π , non 2π .
 Considero il sistema base $(-l,l)$. Se li il
 sistema base e' $\cos\left(n \frac{\pi}{2l} x\right)$ e $\sin\left(n \frac{\pi}{2l} x\right)$

$$\cos\left(n \frac{2\pi}{l} x\right) = \cos\left(n \frac{\pi}{l} x\right)$$

\Rightarrow f, che e' def in $(0,l)$, la prolungano in modo
dispari in $(-l,l)$:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & | x \in (0,l) \\ -f(-x) & | x \in (-l,0) \end{cases}$$

che e' dispari per costruzione. Il suo sviluppo di
 Fourier in $(-l,l)$ sara'

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n \cos\left(\frac{n \pi}{l} x\right)$$

$$\beta_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \tilde{f}(x) \cos\left(\frac{n \pi}{l} x\right) dx =$$

$$= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos\left(\frac{n \pi}{l} x\right) dx =$$

$$= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos\left(\frac{n \pi}{l} x\right) dx$$

Quindi $\forall x \in (0,l)$ possiamo scrivere

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \cos\left(\frac{n \pi}{l} x\right)$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos\left(\frac{n \pi}{l} x\right) dx$$

\Rightarrow allora una condizione rdt: la rdt del problema

$$\begin{cases} u(x,0) = u(x,l) = 0 \\ u'(x,0) = f(x) \end{cases}$$

e' nella forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \cdot e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}Dt} \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx$$

• Se $f: (0, l) \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua integrabile, cioè

$$|b_n| \leq \frac{2}{l} \|f\|_{L^1(0, l)}$$

(*) coeff b_n limitati

allora la serie converge totalmente in ogni regione del tipo

$$x \in (0, l) \quad t \geq \delta > 0$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}Dt} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \right| \leq$$

$$\leq \frac{2}{l} \|f\|_{L^1} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}D\delta}$$

serie numerica, della forma

• Se uno calcola le derivate di qualunque ordine della serie allora il termine generale della serie moltiplicato per

$$n^k \cdot e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}Dt}$$

converge

\Rightarrow la serie delle derivate di qualunque ordine converge

$\Rightarrow u(x,t) \in C^\infty$ per $t > 0$

è facile per il teorema (un) della serie vedere che u è continua anche per $t=0$

• Se $f \in C^1(0, l)$ allora u

- u è C^∞ per $t > 0$
- soddisfa l'eqz
- è C^0 in $(0, l) \times (0, +\infty)$, quindi soddisfa anche le condizioni al contorno.

resta da studiare le condizioni al contorno.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}Dt} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \quad \begin{matrix} x \in (0, l) \\ t > 0 \end{matrix}$$

In che senso viene esatta la serie? Se f soddisfa l'ipotesi e quindi la serie

$$\sum |b_n| < +\infty$$

allora $u \in C^0([0, l] \times [0, T])$ e la si dice esatta in senso classico perché:

$$|b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}Dt} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right)| \leq |b_n|$$

non basta per la convergenza ma basta per i $|b_n|$ costanti

Osserva che la $f: [-l, l] \rightarrow \mathbb{R}$ ha:

- C^0 in $[-l, l]$
- $f(-l) = f(l)$
- f è regolare e continua in $[-l, l]$

condizioni di regolarità

f e la riflessione rispetto di f
 f rep e tritri $\Rightarrow \bar{f}$ rep e tritri

f rep e tritri $\Rightarrow \bar{f}$ C^0 in $[-l, l]$
 $f \in C^0$ in $(0, l]$ $\Rightarrow \bar{f} \in C^0$ in $[-l, l]$
 e $f(0) = 0$ e $\bar{f}(0) = 0$
 anche $f(l) = 0$ $\Rightarrow \bar{f}(-l) = \bar{f}(l) = 0$

$f \in C^0(0, l]$,
 $f(0) = f(l) = 0$,
 f rep e tritri

$\Rightarrow \sum |bn| < +\infty$ e la C^0
 e converge in senso classico

La richiesta $f(0) = f(l) = 0$ deriva dall'over choice
 che $u(0,0) = u(l,0) = 0$.

Quindi questo è coerente con le condizioni agli
 estremi:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0$$

(già nel caso di il dato overchoice e continuo
 sulle $\partial_p \Omega$).

Se $f \in C^2(0, l)$, usi

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} bn \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{l} \right)$$

converge in L^2 ,
 quindi

$$\|f\|_{L^2(0,l)}^2 = \frac{l}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} |bn|^2$$

$t \geq 0$ non scire che

$$\int_0^l |u(x,t) - f(x)|^2 dx =$$

$$= \frac{l}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} |bn|^2 \left(1 - e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2} t} \right)^2 =: \varphi(t)$$

la $\varphi(t)$ è continua per $t \geq 0$, e $|\varphi(t)| \leq \sum |bn|^2$,
 quindi (vale il teo per convergenza \lim e Σ)

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^l |u(x,t) - f(x)|^2 dx =$$

$$= \frac{l}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} |bn|^2 \lim_{t \rightarrow 0} \left(1 - e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2} t} \right)^2 = 0$$

Così se $f \in C^2(0, l)$ allora

$$\|u(\cdot, t) - f\|_{L^2(0,l)} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

e la C^0 è cioè converge in senso L^2 .

Comportamento della u per tempi lunghi.

Se $f \in C^2(0, l)$ allora $|bn| \leq c \frac{1}{n}$ ($c \in \mathbb{R}$). Allora

$$|u| = \left| \frac{bn}{\Sigma} e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2} t} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{l} \right) \right| \leq c e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2} t} =$$

$$\leq c e^{-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 t}$$

$$\leq e^{-\frac{\pi^2}{l^2} t} \text{ converge}$$

allora trascuri una
 stima per $|u| \leq \dots$ \textcircled{P}

Quindi la Σ della u converge per $t \geq 1$. Allora

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \max_{x \in (0, l)} |u(x,t)| \leq$$

per la conv. per $t \rightarrow +\infty$
 scartano \lim e Σ

\Rightarrow la Σ che dipende
 da $n(x,t)$ come costante
 \Rightarrow $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x,t) = \Sigma$

$$\leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \max_{x \in (0, l)} u(x,t)$$

Compara, a
 centro) e
 traspare e
 $u(x,t)$

con la m
 E n anni
 Compa
 in un
 la C^0 .

in un
 E. $\left\{ \begin{array}{l} u(x,t) \\ u(x) \end{array} \right.$

La rel
 Compara
 questo.
 Ciasc
 da dot

Se n T
 Monale
 vedere
 Epa col

Problem
 Un (d
 tra r
 Conide
 Nolan

La rel
 $C^{2,1}$
 Problem

$\left\{ \begin{array}{l} u(x,t) \\ u(x) \\ u(x) \end{array} \right.$

Per res
 x''
 che u

$\left\{ \begin{array}{l} x \\ x' \end{array} \right.$

$$\sum_{t \rightarrow +\infty} \ln e^{-\frac{m^2 t}{l^2}} = \sum_{t \rightarrow +\infty} \ln e^{-\dots} = 0$$

$$\Rightarrow \max_{x \in (0, l)} |u(x, t)| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

questo è un problema di Cauchy-Neumann
 tendente a zero in tutto lo spazio

Comunque, anche in questo caso (come nel precedente sul
 caso integrale, del tipo

$$u(x, t) = \int_0^l h(t, x, y) f(y) dy$$

con la stessa tecnica.

È un caso con problema
 di Cauchy-Neumann
 un risultato più fine sul modo in cui si comporta
 la u .

un caso in cui non
 si può risolvere, si esprime
 da una serie

un esempio con l'eq. del calore retrogrado.

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = \frac{\sin(mx)}{m} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{in } x \in (0, \pi) \\ (m \text{ un parametro}) \end{array}$$

La sol. è: $u(x, t) = \frac{e^{-m^2 t} \sin(mx)}{m}$

Comunque questo è un esempio di problema mal posto.

Cioè la sol. $\nexists!$ ma non dipende con continuità
 dai dati.

Se $m \uparrow$ la $u(x, 0)$ rimane sempre la sol. in senso
 normale: le vibrazioni col tempo non dipendono
 vedere al contrario.

Eq. calore: caso \rightarrow colma, retrogrado: colma \rightarrow bol.

Problema di Cauchy-Neumann
 (di solito)

ha come risultato diretto di
 non poter risolvere il
 problema di Cauchy-Neumann

La \mathbb{R}^n di solito è divisa e regolare (ad es. \mathbb{Q}^+).
 Consideriamo un problema di Cauchy-Neumann (o Cauchy-
 Robin) per

$$u_t - \Delta u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T) := Q_T \quad \text{cioè } u \in C^1(\bar{Q}_T)$$

La sol. di un problema di Cauchy-Neumann nella classe
 $C^{1,2}(\bar{Q}_T)$ con u e $u_x \in C^0(\bar{Q}_T)$ è unica.

Problema di Cauchy-Neumann sul rettangolo

soluzione completa
 tesa: isolata

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 \\ u_x(0, T) = u_x(l, T) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases} \quad \begin{array}{l} Q_T \\ t > 0 \\ x \in (0, l) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{ca (Neumann)} \\ \text{ca (Cauchy)} \end{array}$$

Per rappresentare u nel Q_T la cerchiamo $u = X(x) \cdot T(t)$

$$X'' = \lambda X \quad T' = \lambda T$$

completando la T
 in Q_T

da cui si ottiene $\lambda < 0$ di Neumann e $\lambda < 0$ di Cauchy:

$$\begin{cases} X'' = \lambda X \\ X'(0) = X'(l) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} X(x) = \cos \sqrt{\lambda} x \\ X(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda} x) \end{array}$$

serie $\lambda < 0$

$$X'(x) = -\sqrt{\lambda} c_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} x)$$

$$X(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$X'(l) = 0 \Rightarrow \cos(\sqrt{\lambda} l) = 0 \quad \sqrt{\lambda} l = n\pi$$

$$\lambda = -\frac{n^2 \pi^2}{l^2} \quad (\text{con } n \text{ intero})$$

Ma ora $n=0, 1, 2, \dots$ e otteniamo serie di modi normali

$$u_n(x,t) = e^{-\frac{n^2 \pi^2}{l^2} t} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Costruiamo $u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{l^2} t} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$

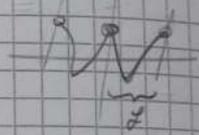
E noni per la condizione di: $f(x) = u(x,0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$

per $x \in (0, l)$.

Sia ora $\tilde{f}(x)$ la funzione pari di f in $(-l, l)$, cioè:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & | \ x \in (0, l) \\ f(-x) & | \ x \in (-l, 0) \end{cases}$$

La \tilde{f} è estensivamente pari e vale $\tilde{f}(l) = \tilde{f}(-l)$



Definiamo allora a_n

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

E in un problema evolutivo come questo la serie di u in x proprio determinata, non a meno di una costante.

\Rightarrow è intuitiva la teorema di Parseval e risposta ora.

Come la condizione ora e allora

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{l^2} t} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- se $f \in C^1(0, l)$ allora $u \in C^2$ per $t > 0$ e u soddisfa l'eq. e le condizioni al contorno (cc)
- se $f \in C^2(0, l)$ la u è esatta in senso L^2
- se $f \in C^0(0, l)$ e regolare e trattata allora la u è esatta in senso classico (continuo?)
- se il compartimento è ben isolato

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \dots = \frac{a_0}{2}$$

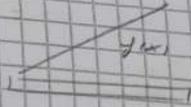
= media integrale della f

mente condit
di raccont
perché con
vill quasi
estensivamente
restituisce

Per ben isol la temperatura tende alla media integrale della temperatura iniziale.

7.1) risolvere il problema di Cauchy-Dirichlet

$$\begin{cases} u_t - 3u_{xx} = 0 & x \in (0,1), t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = x & x \in (0,1) \end{cases}$$



$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{\left[\frac{-n^2 \pi^2}{9} t \right]} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{1} \right)$$

$$b_n = \frac{2}{1} \int_0^1 f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{1} \right) dx$$

per noi: $D=3$, $f(x)=x$, $l=1$ i seni

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{\left[-n^2 \pi^2 3 t \right]} \operatorname{sen}(n\pi x)$$

$$b_n = 2 \int_0^1 x \operatorname{sen}(n\pi x) dx =$$

$$= 2 \left\{ \frac{-x \cos(n\pi x)}{n\pi} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} dx \right\} =$$

$$= \frac{2}{n\pi} (-\cos(n\pi))$$

non rispetta le Cp per
integrabile in modo
debole

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{-\cos(n\pi)}{n} \right) e^{-n^2 \pi^2 3 t} \operatorname{sen}(n\pi x)$$

La f non è regolare, quindi non vale in tutto la
ci conta in senso classico.

7.2 ma in realtà vale di la ci conta con
continuità se si parte in $x=0$ e continua
andò per lo zero in $(0,1)$, estremi esclusi.

7.2) risolvere il problema di Cauchy-Neuman

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & x \in (0,2), t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(2,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (0,1) \\ 2 & \text{se } x \in (1,2) \end{cases} \end{cases}$$

$f(x)$

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{\left[\frac{-n^2 \pi^2}{4} t \right]} \cos \left(\frac{n\pi x}{2} \right)$$

$$a_n = \frac{2}{2} \int_0^2 f(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{2} \right) dx$$

Per noi: $D=1$, $l=2$.

$$a_n = 1 \int_0^2 f(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{2} \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \cos \left(\frac{n\pi x}{2} \right) dx + \int_1^2 2 \cos \left(\frac{n\pi x}{2} \right) dx =$$

$$= \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{2} \right) \frac{2}{n\pi} \Big|_0^1 + 2 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{2} \right) \frac{2}{n\pi} \Big|_1^2 =$$

$$= \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) - \frac{4}{n\pi} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) = \frac{-2}{n\pi} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right)$$

$$a_0 = \int_0^1 1 dx + \int_1^2 2 dx = 3$$

$$u(x,t) = \frac{3}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) e^{\left[\frac{-n^2 \pi^2}{4} t \right]} \cos \left(\frac{n\pi x}{2} \right)$$

In particolare, per $t \rightarrow +\infty$ $u(x,t) \rightarrow 3/2$, che è la media della $f(x)$.

Comunque, come l'antecedente dell'esp. del colore, esp. attese tutte, perché alle colonne con esp.

(E3) risolvere il problema di Cauchy - Neuman

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 \\ u(x,0) = \sin^2(\pi x) \end{cases} \quad \begin{cases} x \in (0,1), t > 0 \\ t > 0 \\ x \in (0,1) \end{cases}$$

$D=1, l=1$, allora

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-n^2 \pi^2 t} \cos(n\pi x)$$

$$a_n = 2 \int_0^1 f(x) \cos(n\pi x) dx$$

Il dato iniziale $f(x)$ è polinomio trigonometrico \Rightarrow scriviamo in serie "a mano"

Ma ci rimane la sviluppo di Fourier in serie coseni, restano da mischiare.

Qui, per capire, controlla se $f(x)$ riflessa nei suoi seni: più $\sin^2(\pi x)$ e non, quindi la riflessa nei suoi seni. Se c'era $\sin^3(\pi x)$ no.

$$\begin{aligned} \sin^2(\pi x) &= \left(\frac{\sin(2\pi x)}{2} \right)^2 = \left(\frac{1 - \cos(2\pi x)}{2} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{4} (1 - 2\cos(2\pi x) + \cos^2(2\pi x)) = \\ &= \frac{1}{4} - \frac{\cos(2\pi x)}{2} + \frac{1}{4} \left(\frac{1 + \cos(4\pi x)}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{4} - \frac{\cos(2\pi x)}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cos(4\pi x) = \\ &= \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos(2\pi x) + \frac{1}{8} \cos(4\pi x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \left[e^{-4\pi^2 t} \cos(2\pi x) \right] + \frac{1}{8} \left[e^{-16\pi^2 t} \cos(4\pi x) \right]$$

In particolare, $u(x,t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 3/8$, media \int della f .

(E4) risolvere il problema di Cauchy - Dirichlet

$$\begin{cases} u_t - D u_{xx} = 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = 1 - \cos(2\pi x) \end{cases} \quad \begin{cases} x \in (0,1), t > 0 \\ t > 0 \\ x \in (0,1) \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-n^2 \pi^2 t} \sin(n\pi x)$$

$$b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin(n\pi x) dx$$

Qui non scriviamo la serie di seno, basta, perché la $f(x)$ non è dispari come e non serve.

$$b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin(n\pi x) dx =$$

$$\begin{aligned} &= 2 \int_0^1 \dots \\ &= 2 \int_0^1 -\cos \dots \\ &= 2 \int_0^1 \frac{1-\cos \dots}{n} \\ &= \frac{2}{n\pi} (1 - \dots) \\ &= \frac{2}{n\pi} (1 - \dots) \\ &= (1 - \dots) \end{aligned}$$

me tanto $b_n = \dots$

Esp. del col $\begin{cases} u_t \\ u(x,t) \end{cases}$

Cosa nota della d

Albanu Cauchy - \dots

Mediante \dots

Talora. La \dots

o Cauchy \dots

e' un \dots

Altrimenti \dots

Trascur \dots

$u(x,t) \dots$

$u(x,t) \dots$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \left\{ \int_0^1 \sin(n\pi x) dx - \int_0^1 \cos(n\pi x) \sin(n\pi x) dx \right\} = \\
 &= 2 \left\{ \frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin((n+2)\pi x) + \sin((n-2)\pi x)}{2} dx \right\} = \\
 &= 2 \left\{ \frac{1 - \cos n\pi}{n\pi} + \frac{1}{2} \left[\frac{\cos((n+2)\pi x)}{(n+2)\pi} \Big|_0^1 + \frac{\cos((n-2)\pi x)}{(n-2)\pi} \Big|_0^1 \right] \right\} = \\
 &= \frac{2}{n\pi} (1 - \cos n\pi) + \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos n\pi - 1}{n+2} + \frac{\cos n\pi - 1}{n-2} \right] = \\
 &= \frac{2}{n\pi} (1 - \cos n\pi) + \frac{\cos n\pi - 1}{\pi} \left[\frac{2n}{n^2 - 4} \right] = \frac{2}{\pi} \frac{(1 - \cos n\pi) - \frac{n}{n^2 - 4} (\cos n\pi - 1)}{n} \quad \text{per } n \neq 2
 \end{aligned}$$

ma tanto $b_2 = 0$, così come in realtà $b_{2n} = 0$ etc.

$$b_n = \frac{2}{\pi} \frac{\cos n\pi - 1}{n(n^2 - 4)} \quad \text{per } n \text{ dispari}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi) - 1}{n(n^2 - 4)} \frac{1}{\exp(n)} e^{-n^2 \pi^2 t} \sin(n\pi x)$$

il bn sono $\sim 1/n^3$, convergono e anche bene perché la fissa e in effetti regolare

Eg. del calore, il probl di Cauchy globale in \mathbb{R}^n .

10/03

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & | \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) & | \quad x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Cosa notevole: in prima e una rela indipendente dalla dimensione n, non serve dimensionare.

Allora diam un tlu di ricata per la rta di un probl di Cauchy-Dirichlet su cilindri di birtate:

$$\Omega_T = \mathbb{R}^n \times (0, T) \quad \text{con } \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^m \text{ dom birtate}$$

Mediante quell multato si può anche dire il seguente

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & | \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) & | \quad x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

è unica, finché $T > 0$, nella classe delle funzioni:

$$C^2(\mathbb{R}^n \times (0, T)) \cap C^0(\mathbb{R}^n \times [0, T]) \quad | \quad \text{birtate su } \mathbb{R}^n \times [0, T] \Rightarrow C^2(\dots)$$

la "stirata"

Allora diam al problema restante la trasformata di Fourier. Ando a

$$\begin{aligned}
 \hat{u}(\xi, t) &= \text{trasf di } \hat{g} \text{ delle n spettre } x = \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} u(x, t) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx \quad \text{Tr. trasformata} \\
 &\quad \text{spettre } x, \text{ con } t \\
 &\quad \text{un parametro}
 \end{aligned}$$

$$\hat{u}_x(u_t - \Delta u) = 0 \quad \text{vediamo (case diretta):}$$

$$-\hat{u}_x(u_t) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^n} u(x, t) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}$$

noto centrale
lo è per direttamente

$y_x(0,t) = -4\pi^2/\xi^2 \bar{u}(\xi,t)$
 \Rightarrow e' eq + diretta
 $\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(\xi,t) + 4\pi^2/\xi^2 \bar{u}(\xi,t) &= 0 \\ \bar{u}(\xi,0) &= \bar{g}(\xi) \end{aligned} \right.$

e' risolvibile
 EDO int, con
 1 parametro

La sol e':
 $\bar{u}(\xi,t) = C(\xi) e^{-4\pi^2 D/\xi^2 t}$

imponiamo la
 cond iniziale:
 $\bar{g}(\xi) = \bar{u}(\xi,0) = C(\xi)$
 $\Rightarrow \bar{u}(\xi,t) = \bar{g}(\xi) e^{-4\pi^2 D/\xi^2 t}$

Se trovo $h(x,t)$ tale che $y_x(h(x,t))(\xi)$ e' proprio
 $e^{-4\pi^2 D/\xi^2 t}$, allora avremo che

$\bar{u}(\xi,t) = \bar{g}(\xi) \cdot \bar{h}(\xi,t) =$
 $= \mathcal{F}(g * h(\cdot,t))(\xi)$

$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} h(x-y,t) g(y) dy$

Ci viene concesso la trasform di Fourier di una
 funzione gaussiana:

$\mathcal{F}(e^{-a|x|^2})(\xi) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{n/2} e^{-\frac{\pi^2}{a}|\xi|^2}$
 ($\forall \mathbb{R}^n, a > 0$)

$\mathcal{F}(e^{-\pi|x|^2})(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2}$ se ricordiamo, e la
 trasform di Fourier di una
 delta e' proprio questa e' trasformata una
 delta:

$\mathcal{F}(f(ax))(\xi) = \frac{1}{|a|^n} \mathcal{F}\left(\frac{f}{a}\right) := \mathcal{F}_a(f)$

Problema: determinare $h(x,t)$ tale che

$\mathcal{F}(h(x,t))(\xi) = e^{-4\pi^2 D/\xi^2 t} =$
 $= e^{-a/\xi^2}$ con $a = 4\pi^2 D t$
 $\mathcal{F}\left(\left(\frac{\pi}{a}\right)^{n/2} e^{-\frac{\pi^2}{a}|\xi|^2}\right) = e^{-a/\xi^2}$

$h(x,t) = \frac{1}{(4\pi D t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4Dt}}$

Da cui la candidata
 formula risolutiva:

$u(x,t) = g(x) * h(x,t) =$
 $= \frac{1}{(4\pi D t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}} g(y) dy$

Proprietà del kernel (colore):

nucleo del calore (heat kernel)
 sempre gaussiano, regolarizzante
 perché nel calcolo
 derivare all' \int tant' u e $\partial_t u$ e $\partial_x u$ e $\partial_x^2 u$
 con loro si annullano ($\partial_x u = 0$) per cui

$$u(x) = \frac{1}{(\sqrt{4\pi t})^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

$$K(x,t) = u_{t=1}(x) = \frac{1}{(\sqrt{4\pi})^{n/2}} u\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x) dx = \hat{u}(0) = 1$$

$$\hat{u}(\xi) = e^{-\sqrt{4\pi t}|\xi|^2}$$

(la + moltiplicare), che e' 70 e in L^2(R^n)
"1/8^n (pi^(n/2))"
{u_{t=1}(x)}_{t>0}

Il nucleo del calore allora si può vedere come una funzione di equazione delle onde (nulla elsewhere)

* se $t \rightarrow 0$ e $x \rightarrow +\infty \Rightarrow$ comparsa di una discontinuità
 se $t \rightarrow 0 \Rightarrow$ la K tende a 0, tranne se $x=0$, dove tende a $+\infty$, cioè

per $t \rightarrow 0 \Rightarrow K(x,t) \rightarrow \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ +\infty & x = 0 \end{cases}$, velocemente

Mostriamo nella quale K la formula di rappresentazione è valida (che verifica la relazione del nostro problema).

formula: partiamo dalla formula

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y,t) g(y) dy$$

- supponi $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$

Mostriamo che $K(x-y,t)$ e tutte le sue derivate si comportano bene rispetto a x e a t sono limitate in ogni regione del tempo $t \geq \delta > 0$

con qual t a derivazione non si' problema

Ricordiamo con $p \in L^1$ possiamo ottenere

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_i} [K(x-y,t) g(y)] \right| \leq \frac{C \cdot |g(y)|}{(\sqrt{4\pi t})^{n/2}}$$

by $p \in \mathbb{R}^n$ $t \in \mathbb{R}^n$

Quindi si può scrivere u come soluzione del P.V.

Ricordiamo $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, +\infty))$, regolare per $t > 0$.

Se u risolve $u_t - \Delta u = 0$ per $t > 0$ se e solo se il nucleo del calore risolve questa eqn, cioè

$$u_t - \Delta u [K(x-y,t)] = 0 \quad \text{per } t > 0, x \in \mathbb{R}^n$$

Mostriamo:

$K(x,t) = K(\rho,t)$ con $\rho = |x|$, e cioè è una funzione radiale

$K(\rho,t) = \frac{1}{(\sqrt{4\pi t})^{n/2}} e^{-\frac{\rho^2}{4t}}$

troviamo la costante per la derivata:

$(u_t - \Delta u)[K(\rho,t)] = \frac{1}{(\sqrt{4\pi t})^{n/2}} (u_t - \Delta u)[K(\rho,t)] = 0$

Mostriamo che $f(\rho,t) = \frac{1}{t^{n/2}} e^{-\rho^2/4t}$

risolve

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \Delta \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{n-1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) = 0$$

lavoriamo in \mathbb{R}^n o una f radiale

$$\frac{\partial f}{\partial t} = e^{-\rho^2/4t} \left(\frac{\rho^2}{4t^2} + \frac{n}{2} t^{-n/2-1} \right) \cdot \frac{1}{t^{n/2}} = f \cdot \left(\frac{\rho^2}{4t^2} - \frac{n}{2t} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{e^{-p^2/4Dt}}{t^{n/2}} \left(-\frac{p}{2Dt} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial p^2} = \frac{e^{-p^2/4Dt}}{t^{n/2}} \left(\left(\frac{p}{2Dt} \right)^2 - \frac{1}{2Dt} \right) =$$

$$= f \cdot \left(\left(\frac{p}{2Dt} \right)^2 - \frac{1}{2Dt} \right)$$

$$\Rightarrow f \cdot \left[\frac{p^2}{4D^2t^2} - \frac{n}{2t} - \delta \left(\frac{p^2}{4D^2t^2} - \frac{1}{2Dt} + \frac{n-1}{R} \left(-\frac{R}{2Dt} \right) \right) \right] =$$

$$f \cdot \left[-\frac{n}{2t} + \frac{1}{2t} + \frac{n-1}{2t} \right] = f \cdot [0] = 0$$

$\Rightarrow \forall t > 0$ si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ allora la $u(x,t)$ è costante nella formula e

- cosi per $(x) t > 0$
 - risolve $u_t - D \Delta u = 0 \quad \forall t > 0$

Inoltre:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x,t) = \lim \int \delta u$$

o può essere lim sotto all'1 perché

$$|h(x-y,t) \cdot g(y)| \leq c \cdot |g(y)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

giacché f la mappatura integrabile e per conv. dominata vale quella soluzione $u(x,t)$, e allora u è

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x,t) = \int \lim = 0$$

ovvero $u(x,t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, comportamento per tempo lunghi.

Dunque, abbiamo lim che $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ la u

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} h(x-y,t) g(y) dy, \quad h = h(x,t) \text{ (colore)}$$

a - e^i $C^0(\mathbb{R}^n \times (0, +\infty))$

b - risolve $u_t - D \Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$

c - $u(x,t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$

È o può dire che a/b restano veri con anche solo $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, cioè solo limitata, non L^1 .

Invece con $f \in L^\infty$ ma $f \notin L^1$ in generale non sono veri che $u(x,t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

Per esempio con $g(x) = c$, perché poi

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} h(x-y,t) \cdot c dy = c \cdot 1 = c$$

perché $h(x,t)$ ha $\int = 1$.

Ma che ovvero vale costante la condizione iniziale? allora esistono che $h(x,t) = \eta_{\tau^t}(x)$ con

$$\eta(x) = \frac{1}{(4\pi D)^{n/2}} e^{-|x|^2/4D} \quad \left(\in L^1, > 0 \right)$$

$\int \eta = 1$

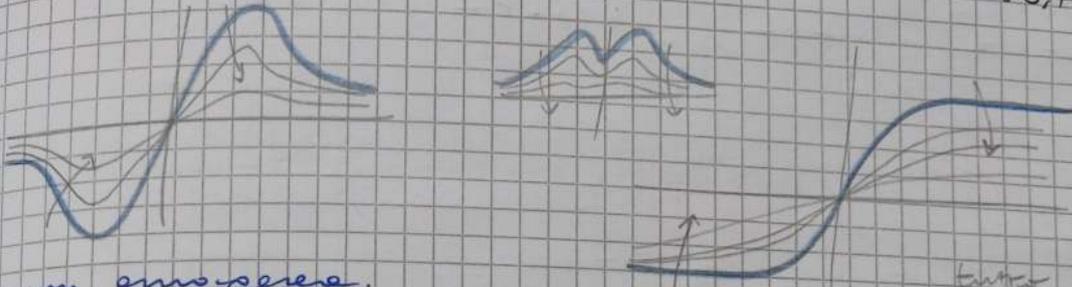
che è un mollificatore, e quindi

$$u(x,t) = (\eta_{\sigma t} * g)(x)$$

è del tipo di nuclei regolari e forti segue che
 - se $g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ allora $u(\cdot, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} g(\cdot)$ (case)
 $\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t) - g(x)| dx = 0$

- se g è uniformemente continua e limitata allora
 $u(\cdot, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} g$ uniformemente. ($C_0^0(\mathbb{R}^n)$)

Ad esempio, se $g \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ (= uniforme e limitata) la
 u è l'unica sol. classica del problema di Cauchy
 nella classe delle sol. limitate su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}_0^0$.



Eg. non omogenea.

$$(u) \begin{cases} u_t - \Delta u = F(x,t) \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$$

temine due sorgenti
 positive di calore

Per brevità (principio di sovrapposizione) una sol. di (1) si può ottenere come

$$u = u_1 + u_2 \quad \text{dove}$$

$$u_1 \text{ sol. di } \begin{cases} (u_1)_t - \Delta u_1 = F \\ u_1(x,0) = 0 \end{cases}$$

partiamo da tutto calore
 e partec. una ora
 che una sorgente F

$$u_2 \text{ sol. di } \begin{cases} (u_2)_t - \Delta u_2 = 0 \\ u_2(x,0) = g(x) \end{cases}$$

che rappresenta
 già l'evoluzione

Andò altrettanto il problema $\begin{cases} u_t - \Delta u = F(x,t) & | x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x,0) = 0 & | x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$

Metodo 1: trasformata di Fourier rispetto a x , come nel caso omogeneo. Si trova

$$\begin{cases} \tilde{u}_t(\xi, t) + 4\pi^2 D |\xi|^2 \tilde{u}(\xi, t) = \tilde{F}(\xi, t) \\ \tilde{u}(\xi, 0) = 0 \end{cases}$$

ξ è un parametro

è un ODE per una EDU lineare del 1° ordine non omogenea, e si è generale di:

$$\tilde{u}(\xi, t) = e^{-4\pi^2 D |\xi|^2 t} \left[C(\xi) + \int_0^t e^{4\pi^2 D |\xi|^2 s} \tilde{F}(\xi, s) ds \right]$$

$$\tilde{u}(\xi, 0) = C(\xi) = 0 \quad \uparrow \text{grazie}$$

$$\tilde{u}(\xi, t) = \int_0^t e^{-4\pi^2 D |\xi|^2 (t-s)} \tilde{F}(\xi, s) ds =$$

$$\mathfrak{F}(h(\cdot, t-s))(\xi)$$

$$= \int_0^t \mathfrak{F}(h(\cdot, t-s) * F(\cdot, s))(\xi) ds =$$

è un $\int_{\mathbb{R}^n} dx \Rightarrow$ il risultato

$$= \mathfrak{F}_x \left(\int_0^t h(\cdot, t-s) * F(\cdot, s) ds \right) (\xi) =$$

avvicinamento:

$$u(x,t) = \left(\int_0^t h(x, t-s) * F(\cdot, s) ds \right) (x) \quad \text{case}$$

$$u(x,t) = \int_0^t \left[\int_{\mathbb{R}^n} h(x-y, t-s) F(y, s) dy \right] ds$$

convolvere nello spazio e nel tempo. Risulta con
 di e h:

$$= \int_0^t \left[\frac{1}{(4\pi D(t-s))^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4D(t-s)}} F(y, s) dy \right] ds$$

è in particolare la rel del qual (4) sono

$$\tilde{u}(x,t) = u(x,t) + \int_{\mathbb{R}^n} h(x-y,t) g(y) dy$$

quella sono, di tre cost del termine F

Le caratteristiche delle u sono più mollemente, di
 sono per esempio "rossi" C'è una proprietà che è
 la F, non dipinti. prima "di là" che è 0 invece

è sul compatto e $t \rightarrow +\infty$ la cosa sono male nelle
 della $u(x,t)$. (e diminuisce la u e si dice
 poter dimostrare che la F è costante)

Alm se $F \in C^{2,1}$ allora la u è regolare sulle
 e' rel dell' eqz $u_t - D\Delta u = F$ per $t > 0$, e
 vale che $u(x,t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$ con $F \in C_0^{2,1}$ per lo stato iniziale
 dentro \mathbb{R}^n e $-D\Delta$, forse

ha molte fonti, per comporre una
 cosa valida che ci

Metodo 2: istruzione, lo usiamo anche altre volte
 è costruttiva, detta "metodo di Duhamel".

Vogliamo risolvere $\begin{cases} u_t - D\Delta u = F(x,t) & | x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$

Invece si sa che ci sarebbe $\begin{cases} v_t - D\Delta v = 0 \\ v(x,0) = g(x) \end{cases}$

[prova 1] Definiamo la funzione $u(x,t;s)$ (a parame
 > 0), rel del pdc come:

$$\begin{cases} A \in W_t(x,t;s) - D\Delta W(x,t;s) = 0 & | x \in \mathbb{R}^n, t > s \\ B \in W(x,s;s) = F(x,s) & | x \in \mathbb{R}^n (t=s) \end{cases}$$

(qual con istante iniziale $t=s$ e alla $t=0$)

[prova 2] Definisci

$$u(x,t) = \int_0^t w(x,t,s) ds$$

verifichiamo formalmente che u risolve il problema
 che è interessante.

• $u(x,0) = \int_0^0 \dots = 0 \Rightarrow$ ci assunta

• $\Delta_x u(x,t) = \Delta_x \int_0^t w(x,t,s) ds = \int_0^t \Delta_x w(x,t,s) ds =$
 $= \int_0^t \Delta_x w(x,t,s) ds$ (per la l.p. di
 un integrale)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t w(x,t,\alpha) d\alpha$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^t f(x) dx &= f(t) && \text{teorema fondamentale del calcolo} \\ \frac{d}{dt} \int_0^t f(x,t) dx &= f(t,t) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) dx \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t w(x,t,\alpha) d\alpha = w(x,t,t) + \int_0^t \frac{\partial w}{\partial t}(x,t,\alpha) d\alpha$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = \underbrace{w(x,t,t)}_{= F(x,t)} + \underbrace{\int_0^t \frac{\partial w}{\partial t}(x,t,\alpha) - D\Delta w(x,t,\alpha) d\alpha}_{= 0 \text{ per } A}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = F(x,t) \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$$

Ma per la rel^a di $w(x,t,\alpha)$ t.c. $\begin{cases} w_t - D\Delta w = 0 \\ w(x,0,\alpha) = F(x,\alpha) \end{cases} \quad t > 0$

no: la rel^a rappresenta che e^t la $y(x)$ si scrive
 $w(x,t,\alpha) = \int_{\mathbb{R}^n} h(x-y, t-\alpha) F(y,\alpha) dy$

da cui dalle def delle u si ritrova la rel^a prima trovata col metodo 1:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^t w(x,t,\alpha) d\alpha = \\ &= \int_0^t \left[\int_{\mathbb{R}^n} h(x-y, t-\alpha) F(y,\alpha) dy \right] d\alpha \end{aligned}$$

Consideriamo $\begin{cases} u_t - D\Delta u = 0 & | \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & | \quad x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$

11/03

Alban trovata: $u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi Dt)^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}} g(y) dy$

Albano da cui se $g \in C^2(\mathbb{R}^n)$ allora

- la u è rel^a dell'eq^a
- e^t C^∞
- $u \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$
- come la u in (alban) resta C^2

(10/100)

È se solo $g \in C^2$ la u è rel^a dell'eq^a e $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$

Ma quell' \int sembra convergere sempre, tanto il ker (colore) è una gaussiana, converge in ogni velocità. Anche se $g(x)$ fosse e^x il ker "se lo mangia".

È ker (colore) per t piccoli va a zero molto più velocemente. Cioè in realtà è \int precedente converge anche se certe $g(x)$ illimitate, purché controllate da una decisa del tipo e^{-Ax^2}

Alban (caso $n=1$). Sia $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e $\lim_{|x| \rightarrow \infty} g(x) = 0$ e $t > 0$
 $g(x) \leq C e^{-Ax^2}$ per qualche $C > 0, A > 0$

allora $\Rightarrow u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-(x-y)^2/4Dt}}{(4\pi Dt)^{1/2}} g(y) dy$

definisce una rel^a su $u_t - D\Delta u = 0$ per $x \in \mathbb{R}, t \in (0, \infty)$

tantos
e' cost
e' d'...

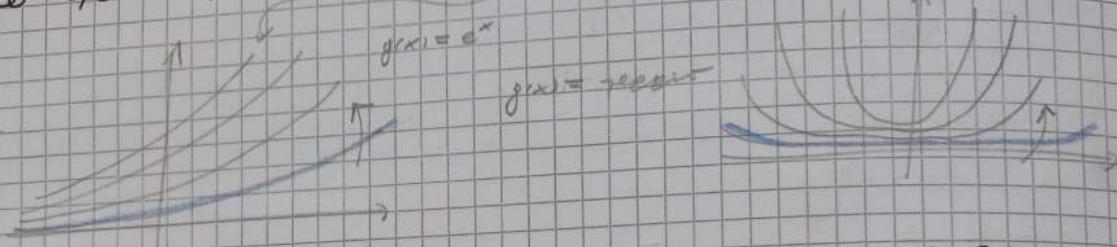
con $T = \frac{1}{4AD}$

infatti: $\frac{1}{4AD} > 0$ per la conv.

$$e^{-\frac{(x-y)^2}{4Dt}} = e^{-\frac{1}{4Dt}(x-y)^2} = e^{-\frac{1}{4Dt}(x^2 - 2xy + y^2)}$$

$\frac{1}{4Dt} - A > 0 \Rightarrow T = \frac{1}{4DA}$ da cui la richiesta

Maiale: gli centri di allentamento al p.d.c. ha ancora
rela per tempi allentamento piccoli, ma la rela
quasi esplodere in tempo finito.
Cosa per t piccoli va bene, e all' T da t esplode.



Ad es. per $g(x) = e^{x^4}$ la m. eseguita dalla
formula risolvente non e' definita per nessun t
Cioe' \neq rela m.

Problema della verta'. Abbiamo visto che c' e' univoco
gli \in p.d.c. nelle classe della rela

$C^{1,2}(\mathbb{R}^n \times (0, T))$ e limitate in $\mathbb{R}^n \times (0, T)$

(che era conseguenza del principio di massimo).
Se valemmo indole e' ipotesi di limitazione?

Si può dimostrare che c' e' ancora univoco nelle
classe della rela che non

$C^{1,2}(\mathbb{R}^n \times (0, T))$ e restretto, in quella
messa in controller del tipo

$|u(x, t)| \leq C e^{A|x|^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad t \in (0, T) \quad p.g. C, A > 0$

oss: pu' non c' e' nessuna richiesta sul comportamento
della p(x).

Campone, quella e' detta analitica di Pexideroff, ed
e' ottomale, cioè \exists un esplet di una

- $u(x, t) \in C^{1,2} \cap C^0(\mathbb{R}^n \times (0, T))$
- non necessita quella condizione
- non e' identicamente nulla
- ma e' nulla per $t=0$, cioè $u(x, 0) = 0$

\Rightarrow per questo non vale l' univoco del tipo

Il nucleo del colore come rela condizionale delle
aperture del colore.

Ente su civer al tipo delle trave delle obte. l'anno,

Per il logoccano la rela condizionale era

$$P(x) = \frac{1}{(n-2) \omega_n (1+x)^{n-2}} \quad (n \geq 3)$$

che era $u(x,0) = \delta_0$

$\Rightarrow u(x,t) = - \int_{\mathbb{R}^n} P(x-y) f(y) dy$

una cosa che mi ha confuso
 alla volta di $u(x,t) = f$ quello del
 con una costante

o la
 $u(x,t) = f$

Per allora usavo la formula per il caso non omogeneo
 dell'eqz del calore. Vediamo come generalizzarla

Cominciamo con
 l'eqz del calore

$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ $t > 0$
 $t \in \mathbb{R}^n$

$\begin{cases} u(x,t) = 0 & \text{per } t > 0 \\ u(x,0) = \delta_0 \end{cases}$

(H: operatore del calore)
 per natura

Come verificare?
 rappresentando $u(x,t)$ come

$u(x,t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \delta_0$
 $D'(\mathbb{R}^n)$

ma la cosa, se la cosa
 del δ_0 con la δ che
 rappresenta (matrice) degenerata
 in δ_0 se $\delta^2 = 0$

Parentesi: se $\{T_h\} \subseteq D'(\mathbb{R}^n)$ e $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ diremo
 che $T_h \xrightarrow{h \rightarrow +\infty} T$ in $D'(\mathbb{R}^n)$

se $\langle T_h, \varphi \rangle \xrightarrow{h \rightarrow +\infty} \langle T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$

Quindi la scrittura sopra su u significa che

$\langle u(x,t), \varphi \rangle \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \langle \delta_0, \varphi \rangle$

$= \int_{\mathbb{R}^n} u(x,t) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} u(0-y,t) \varphi(y) dy$

$\xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \langle \delta_0, \varphi \rangle$ perché $\{u(\cdot, t)\}_{t > 0}$ è una famiglia
 di nuclei regolari.

Il calore (calore) caso classico è evoluzione nella spazio
 e tempo delle temperature in \mathbb{R}^n se all'istante

$t=0$ c'è un impulso di calore concentrato in $x=0$
 (per via della cui con la δ_0)

Ma non vogliamo vedere il calore come un impulso
 di H (operatore del calore) in

\mathbb{R}^{n+1} (spazio-tempo), quindi

Estendiamo $u(x,t)$ anche per $t < 0$ puntato uguale
 e zero caso

$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \\ 0 & \text{se } t < 0, x \neq 0 \end{cases}$

allora
 con la
 la cosa che
 fa di t
 omogenea

$x \neq 0$ per $t \rightarrow 0^+$ $u(x,t) \rightarrow 0$ esemplarmente,
 quindi tutte le derivate di $u \rightarrow 0$ anche

$\Rightarrow u \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0,0)\})$

Con il solito calcolo differenziale è quindi una
 soluzione classica

valm. h (colore) con' $\partial_t h$ e Dh reale
 $h|_{t=0} = \delta_{(0,0)}$ in $D(\mathbb{R}^{n+1})$

case) $\langle h, \varphi \rangle = \varphi(0,0)$ $\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^{n+1})$
 Dim. Proveremo che $\langle h, \varphi \rangle = \varphi(0,0)$ per $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ uguale

Le t.l. e mostriamo che $\langle h, \varphi \rangle = \langle \partial_t h - D\Delta h, \varphi \rangle = \langle h, -\partial_t \varphi - D\Delta \varphi \rangle =$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} h(x,t) (-\partial_t \varphi - D\Delta \varphi)(x,t) dx dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} h(x,t) (-\partial_t \varphi - D\Delta \varphi)(x,t) dx dt =$$

$$= \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} h(x,t) (-\partial_t \varphi - D\Delta \varphi)(x,t) dx dt + \int_\varepsilon^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} h(x,t) (-\partial_t \varphi - D\Delta \varphi)(x,t) dx dt =: A_\varepsilon + B_\varepsilon$$

$\Rightarrow \langle h, \varphi \rangle = A_\varepsilon + B_\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$, mostreremo che $A_\varepsilon + B_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(0,0)$, il che implica che $\langle h, \varphi \rangle = \varphi(0,0)$

$|A_\varepsilon| = \left| \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} h(x,t) (-\partial_t \varphi - D\Delta \varphi)(x,t) dx dt \right| \leq$

$\leq \max_{\mathbb{R}^{n+1}} |h| \cdot \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_t \varphi + D\Delta \varphi| dx dt =$

$= \max_{\mathbb{R}^{n+1}} |h| \cdot \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$

$B_\varepsilon = \int_\varepsilon^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} h(x,t) (-\partial_t \varphi - D\Delta \varphi)(x,t) dx dt =$

$= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_\varepsilon^{+\infty} h(x,t) (-\partial_t \varphi)(x,t) dt \right) dx +$

$- \int_\varepsilon^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^n} h(x,t) (D\Delta \varphi)(x,t) dx \right) dt$

$\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^{+\infty} h(x,t) (-\partial_t \varphi)(x,t) dt \right) dx + \int_0^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^n} h(x,t) (D\Delta \varphi)(x,t) dx \right) dt$

$\Rightarrow B_\varepsilon = \int_\varepsilon^{+\infty} \varphi(x,t) \left(\partial_t h - D\Delta h \right)(x,t) dt dx + \int_{\mathbb{R}^n} h(x,\varepsilon) \varphi(x,\varepsilon) dx$

$$B_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^m} h(x, \varepsilon) [\varphi(x, \varepsilon) - \varphi(x, 0)] dx +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^m} h(x, \varepsilon) [\varphi(x, 0)] dx = B_1^\varepsilon + B_2^\varepsilon$$

Struttura della
rela del problema
con dati iniziali
con cui $\varphi(x) = \varphi(x, 0)$

$$B_2^\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^m} h(x, \varepsilon) \varphi(x, 0) dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varphi(x, 0) \int_{\mathbb{R}^m} h(x, \varepsilon) dx$$

$$|B_2^\varepsilon| \leq \max_{x \in \mathbb{R}^m} |\varphi(x, \varepsilon) - \varphi(x, 0)| \int_{\mathbb{R}^m} h(x, \varepsilon) dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

perché φ è uniformemente continua (essendo C^0)

Quindi

$$A_\varepsilon + B_\varepsilon = A_\varepsilon + B_1^\varepsilon + B_2^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0 + 0 + \varphi(x, 0) \square$$

Il fatto che $Hu = f(x, 0)$ in $D(\mathbb{R}^{n+2})$ è garantito da due in senso rigoroso per le formule delle reti e della esp non omogenea.

Dim. $f \in C^{2,1}(\mathbb{R}^{n+2})$ se uniforme

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^{n+2}} h(x-y, t-s) f(y, s) dy ds$$

allora $Hu = f$ in \mathbb{R}^{n+2} , con $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^{n+2})$.

In particolare, se $f(x, t) = 0$ per $t \leq 0$ allora quella f è annulla per $t \leq 0$ o $t > 0$ (o t) e le formule si riduce a

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^m} h(x, -y, t-s) f(y, s) dy ds$$

e questo si risolve il problema $\begin{cases} Hu = f \\ u(x, 0) = 0 \end{cases} \mid \begin{matrix} x \in \mathbb{R}^m, t > 0 \\ x \in \mathbb{R}^m \end{matrix}$

Se f è limitata in $\mathbb{R}^m \times (0, T)$ allora

$$|u(x, t)| \leq \|f\|_{C^0(\mathbb{R}^m \times (0, T))} \cdot \int_0^t \int_{\mathbb{R}^m} h(x, -y, t-s) dy ds =$$

$$= \|f\|_{C^0(\cdot)} \int_0^t 1 dt \leq$$

$$\leq T \cdot \|f\|_{C^0(\mathbb{R}^m \times (0, T))}$$

quindi le soluzioni delle formule e limitate in quelle risorse, e dei t su u (o u) allora quella rela è l'unica rela che risolve il problema che sia limitata

Dim. Mostriamo che se $f \in C^{2,1}(\mathbb{R}^{n+2})$ e

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^{n+2}} h(x-y, t-s) f(y, s) dy ds$$

allora $Hu = f$. Per controllare della convoluzione

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^{n+2}} h(y, s) f(x-y, t-s) dy ds$$

$$H_u(x,t) = (\partial_t - D\Delta_x) \int_{\mathbb{R}^n} h(y,\tau) f(x-y, t-\tau) dy d\tau =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} h(y,\tau) (\partial_t - D\Delta_x) (f(x-y, t-\tau)) dy d\tau$$

$(\partial_t - D\Delta_x) (f(x-y, t-\tau)) =$ *scambio $\partial_t \rightarrow \partial_\tau$ e $\Delta_x \rightarrow \Delta_y$ compare con (1) - fare Δ_x by inveciando coordinate*

vome esplice il tlu precedente, che diventa

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} h(y,\tau) H^* F(y,\tau) dy d\tau = F(0,0) (= \langle \delta_0, F \rangle)$$

$$= (-\partial_\tau - D\Delta_y) (f(x-y, t-\tau))$$

$$= H^* F(y,\tau) \text{ con } F(y,\tau) = f(x-y, t-\tau)$$

Principali

$$H_u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} h(y,\tau) H^* F(y,\tau) dy d\tau =$$

$$= F(0,0) = F(y,\tau) \Big|_{(y,\tau)=(0,0)} = f(x,t) = f$$

$\Rightarrow H_u = f$ la cui tesi \square

Modello di diffusione, trasporto, reazione
 nascita e esp del colore "completo":

$$u_t - D\Delta u + v \cdot \nabla u + \mu u = 0 \quad (5.7)$$

diff *trasporto* *reazione*

la muclea di melle \Rightarrow all'esp
 la muclea di melle \Rightarrow con proteina
 se l'inh reagisce con proteina

Con u la concentrazione della sostanza. Per risultati, trattiamo il caso unidimensionale:

$$u_t - D u_{xx} + v u_x + \mu u = 0 \quad x \in \mathbb{R}$$

$D > 0, v > 0, \mu \geq 0$ (obvio, ve col contesto)

parte sinistra termine di ordine superiore
 ∂_t ∂_x ∂_{xx}
 qui ∂_x ∂_{xx} risp al tempo ∂_x ∂_{xx} max 1 volta, nella spaz ∂_x ∂_{xx} max 2 volte

Se $D \neq 0, v \neq 0$ qualunque, el neobiamo. Senza la $D\Delta u$ ($D=0$) come tutto. Con esp ascende.

trovare la massima parte principale, quella esp e quella con la

Conver di variabile: poner

$$w(x,t) = e^{ax+bt} \cdot w(x,t)$$

con a, b da determinam in seguito in modo che w soddisfa un'eq ∂_t ∂_x ∂_{xx} .

- $u_t = e^{ax+bt} (w_t + bw)$
- $u_x = e^{ax+bt} (w_x + aw)$
- $u_{xx} = e^{ax+bt} (w_{xx} + 2aw_x + a^2w)$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_t - Du_{xx} + v u_x + \rho u = 0 & | x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = g(x) & | x \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ dove } t > 0$$

$$e^{ax+bt} [w_t + bw - D(w_{xx} + 2aw_x + a^2w) + v(w_x + aw) + \rho w] = 0$$

$$w_t + -Dw_{xx} + w_x(v - 2aD) + w(b + \rho - Da^2 + va) = 0$$

scelgo a e b tale: $\begin{cases} v - 2aD = 0 \\ b + \rho - Da^2 + va = 0 \end{cases}$ con w invariabile in x e t più semplice

$$v = 2aD \Rightarrow a = \frac{v}{2D}$$

$$b = -\rho + D\left(\frac{v^2}{4D^2}\right) - \frac{v^2}{2D} = -\rho - \frac{v^2}{4D} = b$$

quindi $\Rightarrow u(x,t) = e^{\left(\frac{v}{2D}\right)x - \left(\rho + \frac{v^2}{4D}\right)t} w(x,t)$

w è solo di: dove $w_t - Dw_{xx} = 0 \quad | x \in \mathbb{R}, t > 0$ (uso w e rel di quella) \Rightarrow scelta del calore

E dalle eq:

$$g(x) = u(x,0) = e^{ax} w(x,0) \Rightarrow w(x,0) = e^{-ax} g(x)$$

Da cui la w è data da

$$w(x,t) = \int_{\mathbb{R}} h(x-y,t) e^{-ay} g(y) dy$$

$$\Rightarrow u(x,t) = e^{-\left(\rho + \frac{v^2}{4D}\right)t} \int_{\mathbb{R}} h(x-y,t) e^{\frac{v}{2D}(x-y)} g(y) dy$$

che è rel del grad con termini di trasporto, diffusione e reazione.

$$u(x,t) = e^{-\left(\rho + \frac{v^2}{4D}\right)t} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4Dt}}}{(\sqrt{4Dt})^{1/2}} e^{\frac{v}{2D}(x-y)} g(y) dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \tilde{w}(x-y,t) g(y) dy \quad \text{dove}$$

$$\tilde{w}(x,t) = h(x,t) \cdot e^{\frac{v}{2D}x} \cdot e^{-\left(\rho + \frac{v^2}{4D}\right)t}$$

In particolare, se $v=0$ (solo diff e reatt) allora

$$u(x,t) = e^{-\rho t} \int_{\mathbb{R}} h(x-y,t) g(y) dy = e^{-\rho t} \cdot \text{la rel. del calore} \quad \text{scelta del calore}$$

Problema ora qual w invariabile \Rightarrow esp. omogenea (non!)

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} + v u_x + \rho u = f(x,t) & | t > 0 \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$$

usando il metodo di Duhamel

Definisco $w(x,t,\tau)$ rel delle stesse eq ma omogenea, e per $t > \tau$, e con:

$$\begin{cases} w_t - Dw_{xx} + v w_x + \rho w = 0 & | t > \tau \\ w(x,\tau, \tau) = f(x,\tau) & | t = \tau \end{cases}$$

è trascurabile la quantità sotto y-line
 $w(x,t,s) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{w}(x-y, t-s) f(y,s) dy$

da cui

$$u(x,t) = \int_0^t w(x,t,s) ds = \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}} \tilde{w}(x-y, t-s) f(y,s) dy \right) ds = \int_0^t \frac{e^{-\left(\sigma + \frac{\sigma^2}{4D}\right)(t-s)}}{(4D(t-s))^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4D(t-s)}} e^{\frac{\sigma}{2D}(x-y)} f(y,s) dy ds$$

È giusto re valutare i termini
 $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} = f \\ u(x,0) = f(x) \end{array} \right.$ attenzione la u come
 nome di due variabili

Ex. trovare e estendere le tecniche sotto (per esempio)
 nell'eq di diff/trasp/reat su \mathbb{R}^n

$$u_t - D \Delta u + \sigma \cdot \nabla u + Vu = 0 \quad (of)$$

Idea: nell'eq di variabile una su \mathbb{R}^n :

$$u(x,t) = \underbrace{e^{a \cdot x + bt}}_{e^{2a \cdot x + bt} \text{ case}} W(x,t)$$

Con a, b da scegliere e qd con Duclaud o come
 al con col termine noto f

(#2). Eq di diffusione e reatt sul reattivo (nell
 con condiz. di nos)

(#3). Applicare Met Duclaud all'eq non omogenea
 (=f) sul reattivo (regla con costante eol
 estremo = 0).

Idea: cambio di variabile una tecnica o le reti
 su campo di vettori

EQ LINEARE DEL TRASPORTO

4.4/03

Nella situazione unidirezionale dell'eq di diffusione abbiamo
 l'obiettivo prima una legge di conservazione:

$$u_t + \nabla \cdot g(u) = f(t, x)$$

però non è in caso conservativo, dove $g(u)$ era il
 flusso, che dipende da u tenne
 - di diffusione
 - di convezione / trasporto

È allora erroneo attribuirli alla diffusione e non al
 trasporto.

Una soluzione: esprimersi adesso che la diffusione sia
 trascurabile rispetto al trasporto.

Situazione più semplice: $g(u) = v \cdot u$

$$\Rightarrow \nabla \cdot g(u) = \nabla \cdot (v \cdot u) = v \cdot \nabla u$$

o v è costante

che da come eq

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \cdot \nabla u = f(x,t)$$

che è detta eqz. d'onda del trasporto. Ci può anche essere ancora un termine di reazione (decomposizione), cioè un $+Du$ con $D > 0$.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \cdot \nabla u + Du = f(x,t)$$

trasporto — reazione — dissipazione

Ci sono comunque altri modelli non d'onda, come la grav.

- Es: modelli di traffico automobilistico. Inizio con $x \in \mathbb{R}$, $u(x,t)$ la densità di autoveicoli.

$$u_t + (gu)_x = f(x,t) = 0$$

se non ci sono entrate/uscite

Cosa si osserva per $n=1$.

$$\begin{cases} u_t + v u_x + Du = f(x,t) & | \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$$

Step 1. $u_t + v u_x = 0, x \in \mathbb{R}$

Questa eqz. di trasporto "pura", ci muoviamo e determiniamo l'integrale generale.

Supponiamo che $u(x,t) \in C^1(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$ risolve l'eqz. Allora osserviamo che $u(x,t)$ è costante lungo tutte le rette del tempo (rette nello spazio-tempo).

$$x - vt = \xi, \quad \xi = \text{costante}$$

Infatti $u(x,t)$ è costante, se $x = \xi + vt$, in

$$U(t) = u(\xi + vt, t)$$

risolviamo in implicando che x

$$U'(t) = \frac{\partial}{\partial x} u(\xi + vt, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\xi + vt) + \frac{\partial}{\partial t} u(\xi + vt, t) =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial t} u + v \frac{\partial}{\partial x} u \right) (\xi + vt, t) = 0 \quad \text{perché in eqz. di } u_t + v u_x = 0$$

$U'(t) = 0 \Rightarrow u(x,t)$ costante lungo quella retta. Ma se v è costante allora

$$u(\xi + vt, t) = u(\xi + vt, t) \Big|_{t=0} = u(\xi, 0) := g(\xi)$$

Con lo stesso cd. nel inverso ($\xi + vt = x$) segue

$$u(x,t) = g(x - vt) \quad \forall x \in \mathbb{R}, t > 0$$

con $g \in C^1(\mathbb{R})$: è proprio quello che si voleva. viceversa, se $g \in C^1(\mathbb{R})$ qualunque allora

$u(x,t) = g(x - vt)$ risolve l'eqz. infatti:

$$u_t + v u_x = -v g'(x - vt) + v g'(x - vt) = 0$$

Uln. L'insieme di tutte le generali dell'eqz. $u_t + v u_x = 0$ è dato da

$$u(x,t) = g(x - vt)$$

al variare di tutte le possibili $g \in C^1(\mathbb{R})$. Se ora vogliamo risolvere il p.c. con $u(x,0) = G(x)$

invarianza

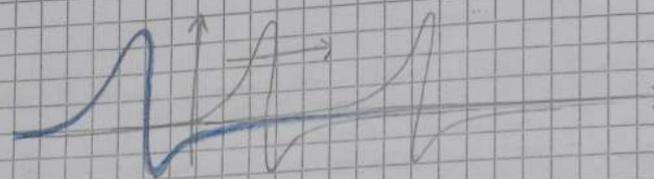
$$u(x,0) = f(x-vt) \Big|_{t=0} = f(x) = G(x)$$

da cui si deduce che anche la soluzione $u(x,t)$ con la stessa forma della $f(x)$ e con la stessa velocità v .

giungo l'incolla alla classe del pdc

$$\begin{cases} ut + vx = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

$$u(x,t) = g(x-vt)$$



"propagazione; si muove con velocità v"

Metodo 2. allo stesso risultato si poteva arrivare anche facendo un cambio di variabile di semplice tipo

Eseguire al cambio in (x,t) dipendenti

$$\begin{cases} \xi = x + vt \\ \eta = x - vt \end{cases}$$

trasformazione
 \rightarrow le variabili

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = v \frac{\partial u}{\partial \xi} - v \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$ut + vx = 0 \text{ diventa}$$

$$\Rightarrow (v u_\eta - v u_\xi) + v(u_\xi + u_\eta) = 0$$

$$2v u_\eta = 0$$

$$u_\eta = 0$$

cerchi in ξ (cioè $u = u(\xi)$), ma $\eta = x - vt$ quindi ritroviamo il problema.

$$u(x,t) = f(\xi) = f(x + vt) \text{ per } f \text{ qualunque } C^2$$

Step 2. Eqs non omogenee

$$\begin{cases} ut + vx = f(x,t) \\ u(x,0) = g(x) \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

troviamo prima un'omogenea e la decomponiamo in

$$\begin{cases} ut + vx = 0 \\ u(x,0) = g(x) \end{cases} \quad \begin{cases} ut + vx = f(x,t) \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$$

la decomponiamo in

Con $u =$ somma delle sol. dei due problemi. Per il secondo usiamo il metodo di Duhamel.

Come nell'eq. del calore, anche questa eq. del trasporto è del 1° ordine nel tempo.

1. Definiamo $w(x,t, \tau)$ sol. del problema omogeneo scelti nel tempo:

$$\begin{cases} w_t + vx = 0 \\ w(x,0, \tau) = f(x, \tau) \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

2. Definiamo $u(x,t) = \int_0^t w(x,t, \tau) d\tau$ e in questa forma

qui serve $f \in C^2$ nella x e in τ e si può

Da 1 la relazione:

$$w(x,t,s) = f(x-v(t-s), s)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \int_0^t f(x-v(t-s), s) ds$$

perché con $f(x-vt)$ su t partiamo da 0, quindi quando da $s=0 \Rightarrow f(x-v(t-s))$

Mostriamo che la relazione:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(x,t,s) ds$$

perché se $\frac{\partial f}{\partial x} \in C^0 \Rightarrow \exists$ il limite e quello è 0 (7) allora è giusto se unire il tutto di \int_0^t

se $\exists \frac{\partial f}{\partial x} \in C^0(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$ quindi necessario e l'altro

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \int_0^t (-v) \frac{\partial f}{\partial x}(x-v(t-s), s) ds + f(x,t)$$

e così è vero perché $f \in C^0(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$ anche

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} u_t + v u_x &= f + \int_0^t (-v) \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial x} (\dots) ds = f \\ u(x,0) &= \int_0^0 \dots = 0 \end{aligned} \right.$$

il polt esce fuori \Rightarrow rimane quella che doveva restare

Per $f \in C^0(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$ e tale che $\frac{\partial f}{\partial x} \in C^0(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$ la

$$u(x,t) = \int_0^t f(x-v(t-s), s) ds$$

$$\text{risolve al problema } \left\{ \begin{aligned} u_t + v u_x &= f & | & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) &= 0 & | & x \in \mathbb{R} \end{aligned} \right.$$

Step 3. Termine di ricerca

$$\left\{ \begin{aligned} u_t + v u_x + \tau u &= 0 \\ u(x,0) &= g(x) \end{aligned} \right.$$

è il termine in t

L'idea è: se fosse $u \perp x$ e è eq. invariante $u_t + \tau u = 0$.
E quindi $u(t) = c e^{-\tau t}$

Quindi dobbiamo $u(x,t) = e^{-\tau t} w(x,t)$ con w la incognita, allora

$$u_x = e^{-\tau t} w_x$$

$$u_t = e^{-\tau t} (w_t - \tau w)$$

$$u_t + v u_x + \tau u = 0 \text{ diventa}$$

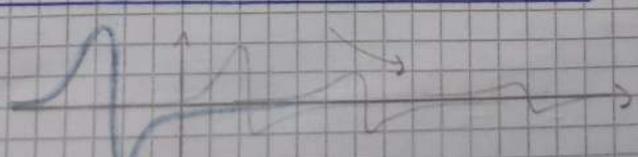
$$\Rightarrow e^{-\tau t} (-\tau w + w_t + v w_x - \tau w) = 0$$

$$w_t + v w_x = 0$$

e la cui è $w(x,0) = u(x,0) = g(x)$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} w_t + v w_x &= 0 \\ w(x,0) &= g(x) \end{aligned} \right. \rightsquigarrow w(x,t) = g(x-vt) \text{ da cui}$$

$$u(x,t) = e^{-\tau t} g(x-vt)$$



restano \Rightarrow cosa è decedimento

Con termine note

$$\begin{cases} u_t + v u_x + \tau u = f \\ u(x, 0) = 0 \end{cases}$$

Come prima col caso non transiente

$$e^{-\tau t} (u_t + v u_x) = f(x, t) e^{\tau t}$$

$$\begin{cases} u_t + v u_x = f(x, t) e^{\tau t} \\ u(x, 0) = 0 \end{cases} \quad \text{§ 2.2}$$

Applichiamo la formula trovata con Duhamel

$$u(x, t) = \int_0^t f(x - v(t-s), s) e^{\tau s} ds$$

da cui la u viene

$$u(x, t) = e^{-\tau t} u(x, t) =$$

$$= e^{-\tau t} \int_0^t f(x - v(t-s), s) e^{\tau s} ds =$$

$$= \int_0^t f(x - v(t-s), s) e^{-\tau(t-s)} ds$$

Ma delimitare meglio tutto in la di la rel di

$$\begin{cases} u_t + v u_x + \tau u = f(x, t) \\ u(x, 0) = g(x) \end{cases} \quad \text{§ 2.2}$$

$$u(x, t) = e^{-\tau t} g(x - vt) +$$

$$+ \int_0^t f(x - v(t-s), s) e^{-\tau(t-s)} ds$$

Con $g \in C^1(\mathbb{R})$, $f \in C^0(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$, $\frac{\partial f}{\partial x} \in C^0(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$.

è tale in la rel classica

Tuttavia questa è una generalizzazione a dimensione n.

$$\begin{cases} u_t + \tau u = \Delta u + \tau u = f(x, t) & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

Con quindi $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. La formula di rel esce

$$u(x, t) = e^{-\tau t} g(x - vt) +$$

$$+ \int_0^t f(x - v(t-s), s) e^{-\tau(t-s)} ds$$

Altra cosa: l'eqz del trasporto non regolata, e differenza di quella di dilatare.

Come li soli con g della C^0 solo C^0 la u uscirà C^0 .

$$\begin{cases} u_t + v u_x = 0 \\ u(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

obliano che $g \in C^1(\mathbb{R})$ e la rel è $u(x, t) = g(x - vt)$

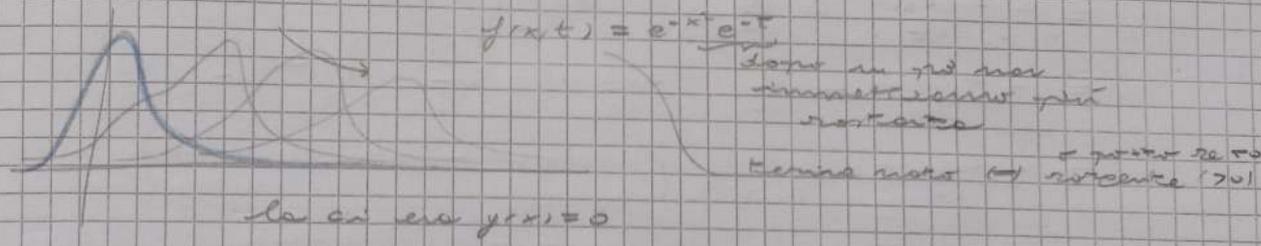
$g \in C^1(\mathbb{R}) \Rightarrow u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$, non c'è regolarità critica

È così dipende dal fatto che il vettore del dato iniziale si propaga inalterato nello spazio tempo lungo la

$$x - vt = \xi = \text{costante}$$

Questo fatto lo ritroviamo nell'eqz delle onde
 Compone, le rette dello spazio-tempo $x = vt = cost$ sono
 dette rette caratteristiche.

Compone la c_1 e c_2 di questo c^* , che è molto come rielabora
 Vedremo che questo porta all'equazione di d'Alembert solo in
 caso di onde (proprio la c_1 non è risolubile).



Es. (E1)
$$\begin{cases} u_t + 3u_x = x \cdot t & | x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = e^{-x^2} & | x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$u(x,t) =$ solz oneprese con $f(x)$ come c_1 + solz non oneprese con c_1 nulla

$$= e^{-(x-3t)^2} + \int_0^t f(x-3(t-s),s) ds =$$

$$= e^{-(x-3t)^2} + \int_0^t (x-3(t-s)) \cdot s ds =$$

$$\int_0^t xs - 3ts + 3s^2 ds = (x-3t) \frac{t^2}{2} + 3 \frac{t^3}{3}$$

$$= e^{-(x-3t)^2} + \frac{t^2}{2} (x-t)$$

oss sulla integrale $\int_0^t f(x-v(t-s),s) ds = I$

se $f = f(x)$ allora

$$I = \int_0^t f(x-v(t-s)) ds = \int_0^t f(x-vs) ds$$

Cosa succede per tempo lunghi? $t \rightarrow \infty$ ruolo null', quindi
 non vanno a finire

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t f(x-vs) ds = \int_0^{+\infty} f(x-vs) ds, \text{ se } \exists$$

$= u_{\infty}(x)$ funz del stato stazionario

possiamo $x-vs = y$.
 Allora (caso $v > 0$) $y \in (x, -\infty)$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{v} \int_{-\infty}^x f(y) dy$$

se $\forall x \in \mathbb{R}$ converge l' $\int_{-\infty}^x f(y) dy$ (e $v > 0$) allora la
 solz di

$$\begin{cases} u_t + v u_x = f(x), \text{ detta } u, \text{ allora tende} \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$$

$u \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} u_{\infty}(x) = \frac{1}{v} \int_{-\infty}^x f(y) dy$

se $f = f(t)$ allora

$$u(x,t) = \int_0^t f(s) ds$$

oss la solz u è una funzione del tempo stato,
 ed è una $u = u(t)$, funz del solo tempo

$$(E2) \begin{cases} u_t + v u_x = t \cos x \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^t \cos(x-v(t-s)) \cdot s \, ds = \\ &= -\frac{s}{v} \cos(x-v(t-s)) \Big|_0^t + \int_0^t \frac{1}{v} \cos(x-v(t-s)) \, ds = \\ &= -\frac{t \cos x}{v} + \frac{1}{v} \int_0^t \cos(x-v s) \, ds = \\ &= -\frac{t \cos x}{v} + \frac{1}{v} \left(-\frac{1}{v} \sin(x-v s) \Big|_0^t \right) = \\ &= \underbrace{-\frac{t \cos x}{v}}_{\text{illustrieren für } t \rightarrow +\infty} + \underbrace{\frac{1}{v^2} (\sin x - \sin(x-v t))}_{\text{Limeswert, für } t \rightarrow +\infty} \end{aligned}$$

Man hat $\sin x$, $f = t \cos x \Rightarrow f \pi$ per $t \pi$.

$$(E3) \begin{cases} u_t + v u_x + \theta u = \cos x = f(x,t) \\ u(x,0) = e^{-x^2} = g(x) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= e^{-\theta t} e^{-(x-vt)^2} + \\ &+ \int_0^t e^{-\theta(t-s)} \cos(x-v(t-s)) \, ds = \\ &- \int_0^t e^{-\theta s} \cos(x-v s) \, ds = \text{gleiches Integral} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= e^{-\theta t} e^{-\theta(t-s)^2} + \\ &+ \frac{1}{v^2 + \theta^2} \left[v (e^{-\theta t} \cos(x-vt) - \cos x) + \right. \\ &\quad \left. - \theta (e^{-\theta t} \sin(x-vt) - \sin x) \right] \end{aligned}$$

$$u(x,t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} u(x) = \frac{1}{v^2 + \theta^2} (-v \cos x + \theta \sin x)$$

$$(E4) \begin{cases} u_t + v u_x = e^{-t} \\ u(x,0) = e^{-|x|} = g(x), \text{ man verliert die v-Abhängigkeit} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= e^{-|x-vt|} + \\ &+ \int_0^t e^{-s} \, ds = -e^{-s} \Big|_0^t = -e^{-t} + 1 \\ &= e^{-|x-vt|} + 1 - e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1 \end{aligned}$$

$$(E5) \begin{cases} u_t - u_x + 2u = 1 = f(x,t) \\ u(x,0) = \cos x = g(x) \end{cases}$$

Da $v=0$, Courant

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \cos(x+t) e^{-2t} + \int_0^t e^{-2(t-s)} \cdot 1 \, ds = \\ &= \cos(x+t) e^{-2t} + \int_0^t e^{-2s} \, ds = \\ &= \cos(x+t) e^{-2t} + \frac{1}{2} (1 - e^{-2t}) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$(E6) \begin{cases} u_t + 2u_x = e^{-t} \cos x \\ u(x,0) = \frac{1}{1+x^2} \end{cases}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{1+(x-2t)^2} + \int_0^t \sin(x-2(t-s)) e^{-s} ds = \dots$$

Ex: Equazione del Trasporto, Condizione debole.

15/03

$$\begin{cases} u_t + v u_x = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases} \quad \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{array}$$

Quanto trasporto $u(x,t) = f(x-vt)$ come relax, con $f \in C^1$.
 Ma dal p.d.v. fisico è lecito supporre che la f sia
meno regolare, $f \notin C^1$.

Quanto $f(x)$ è solo una condizione iniziale.

Come $u(x,t) = f(x-vt)$ ha ancora senso come def.
ma se non è derivabile cosa significa che "è relax"
 (involucro) $\epsilon \equiv \text{DP?}$

in termini di dondole ogni punto di $u(x,t)$
 \Rightarrow avere cond , con $f \notin C^1$, deve avere della instabilità.
 Come proprio nei problemi quanti, ma
che succede allora?

Si arriva all' origine della formulazione / relax debole

Per arrivare alla formulazione debole rispetto a come è
ricominciare quella EDP, e ci si ferma in ottanta prima:

Si dà una def di relax debole attraverso una formulazione integrale.

Esprimere cioè la def. di relax debole dell' eqn

$$\begin{cases} u_t + v u_x = f(x,t) \\ u(x,0) = g(x) \end{cases} \quad \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{array}$$

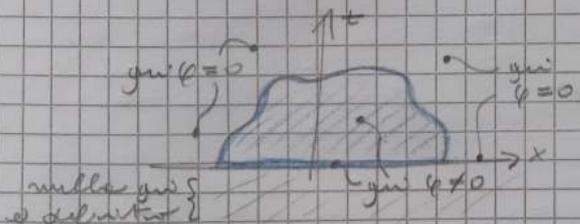
Supponiamo prima che u, f, g siano regolari g.b. Moltiplicando
per φ e si integra per una prova $t_0 = t + \epsilon$ ($t+t$).

$$\varphi(x,t) : \varphi \in C_0^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$$

quanto buona
 caso moltiplicando e
poi calcolando: quanto è tempo:

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} (u_t + v u_x)(x,t) \cdot \varphi(x,t) dx dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x,t) \varphi(x,t) dx dt$$



$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{+\infty} u_t \varphi dt \right) + v \left(\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} u_x \varphi dx \right) dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x,t) \varphi(x,t) dx dt$$

$$A = \int_{\mathbb{R}} \left\{ u \varphi \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u \varphi_t dt \right\} dx =$$

$$0 - u(x,0) \varphi(x,0) = -g(x) \varphi(x,0)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} -g(x) \varphi(x,0) dx - \int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} u \varphi_t dt dx$$

$$B = v \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} -u \varphi_x dx dt$$

in questo modo
 abbiamo spostato la
 derivata sulla φ

$$-\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \varphi(x,0) dx - \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} u_t [\varphi_t + v \varphi_x] dt dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x,t) \varphi(x,t) dt dx$$

ambos se me es rta classica del pdc $\forall \varphi$ test e come prima scelta, se la

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} u_t [\varphi_t + v \varphi_x] dt dx + \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x,t) \varphi(x,t) dt dx +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}} g(x) \varphi(x,0) dx = 0$$

almeno se si è la demote su φ e tutto l'altro
 e con alcuni mollatori φ la nulla su φ e f e g

Def. Se $f(x,t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$, $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$
 e suce di $u \in C^1_{loc}(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$ e' rta debole del pdc

$$\begin{cases} u_t + v u_x = f & | x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = g & | x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

l'idea L^1_{loc} e' la
 moltiplicazione di φ
 $\varphi \in C_0^\infty$ la rta la
 convergenza del
 integral

se $u \in C^1(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$ vale l'identita' integrale
 sopra φ e convete

Def. Se $u \in C^1(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$ e' rta classica del pdc
 sulla regione con f e g allora u e'
 anche rta debole

Caso: u regolare e rta classica $\Rightarrow u$ e' anche rta debole

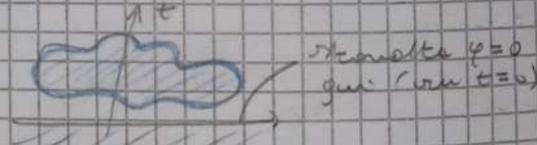
Se u e' rta debole e inoltre e' regolare, cioè
 $u \in C^1(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$, mostreremo che u e' anche rta
 classica.

Caso: u rta debole e regolare $\Rightarrow u$ e' anche rta classica

Dim. Sappiamo la def di rta debole e per questo

$$\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$$

allora se annulla la
 parte $\varphi(x,0)$:



$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} u_t [\varphi_t + v \varphi_x] + f \varphi dx dt = 0$$

per questo
 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$
 $u \in C^1(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$

$$- \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} -\varphi [u_t + v u_x] + f \varphi dx dt = 0$$

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,t) \{ f(x,t) - u_t - v u_x \} (x,t) dx dt = 0$$

φ e' generica $(u \in C^1 \text{ su } \mathbb{R} \times (0, +\infty)) \Rightarrow$ e' nulla
 la φ e' costante di (x,t)

Per la prop di convete degli integrali e per questo

$$u_t + v u_x = 0 \quad | x \in \mathbb{R}, t > 0$$

Per la ci: riprenderemo la identita' \int e riprenderemo
 la φ in

$$\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$$

e riintegriamo per parti. Integriamo la parte ora
 non nota per le altre:

il termine $\int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} u \varphi_t dt dx$ da cui $-\int_{\mathbb{R}} u(x,0) \varphi(x,0) dx$
 $\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} \varphi \{ \dots = 0 \} dt dx + \int_{\mathbb{R}} [g(x) - u(x,0)] \varphi(x,0) dx = 0$

Come prima allora per la
 continuità delle integrande e continuità dello φ segue
 $u(x,0) = g(x) \quad | \quad x \in \mathbb{R}$

Abbiamo dimostrato che

Defin. Se $u \in C^1(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$ ed è rel. debole di

$$\begin{cases} u_t + v u_x = f & | \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = g \end{cases}$$

con $f \in C^0(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$, $g \in C^0(\mathbb{R})$, allora u è anche
rel. classica.

Resto aperta la possibilità di rel. debole non C^1 e
 non classica.

Defin. Supponiamo che $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ cioè limitata, e anche
 $f \in L^\infty(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$, e sia

$$u(x,t) = g(x-vt) + \int_0^t f(x-v(t-s), s) ds$$

allora u è rel. debole del problema

$$\begin{cases} u_t + v u_x = f \\ u(x,0) = g \end{cases}$$

come dimostreremo cambiando variabile alle
 nuove coordinate. Cioè
 considereremo sempre una rel. debole

Defin. (nel caso $f=0$). Vorremo mostrare che

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} u [\varphi_t + v \varphi_x] dx dt + \int_{\mathbb{R}} g(x) \varphi(x,0) dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$$

con la u che è data dalla formula precedente:
 $u = g(x-vt)$ cioè, allora il primo integrale diventa

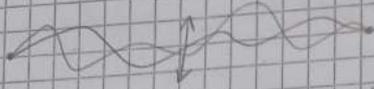
$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} u [\varphi_t + v \varphi_x] dx dt = \\ & = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} g(x-vt) [\varphi_t + v \varphi_x](x,t) dx dt = \left\{ \xi = x-vt \right\} \\ & = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} g(\xi) [\varphi_t + v \varphi_x](\xi+vt, t) d\xi dt = \\ & = \int_{\mathbb{R}} g(\xi) \int_0^{+\infty} U'(t) dt d\xi = \\ & \quad U'(t) = \varphi_x(\xi+vt, t) \cdot v + \varphi_t(\xi+vt, t) = \varphi_t + v \varphi_x \\ & = \int_{\mathbb{R}} g(\xi) (U(\infty) - U(0)) d\xi = \\ & \quad \varphi \in C_0 \quad \varphi(\xi+vt, t)|_{t=0} = \varphi(\xi, 0) \\ & = - \int_{\mathbb{R}} g(\xi) \varphi(\xi, 0) d\xi \quad \text{che è l'opposto} \\ & \quad \text{del secondo pezzo} \\ & \Rightarrow \text{si annullano } \square \end{aligned}$$

EQZ DELLE ONDE

Eqz della corda vibrante

La vita cartacea di d'Alembert, Euler, Bernoulli, Fourier al 1750. È stata una questione molto importante

Desideriamo il modello fisico. Prendiamo un filo teso, elastico, teso, bilico di vibrazione in un piano verticale.

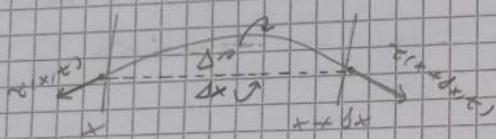


ad ogni istante t la $u(x,t)$ dà il costo della corda

$u(x,t)$: profilo della corda / $\frac{\partial u}{\partial x}$: profilo della corda / $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$: profilo della corda

Supponiamo che le due estremità della corda siano vincolate

- la tensione della corda
- un eventuale forza esterna in direzione verticale (ma la tensione è trasversale)



Sia $\rho(x,t)$ la densità lineare della corda

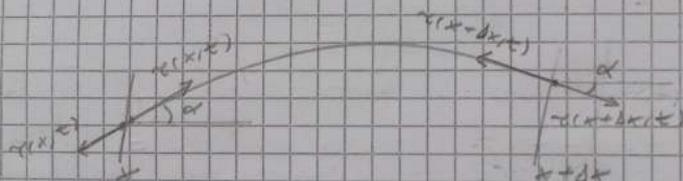
non può essere costante, perché la densità della corda può variare con la lunghezza, cambia la densità della corda

La densità della massa si può esprimere dicendo che

$$dm = \rho(x) dx = \rho(x,t) ds$$

calcolata a riposo

$$\rho = \frac{m}{l} \Rightarrow m = \rho l \text{ con } l \text{ nel suo stato di riposo}$$



Bilancio delle forze in orizzontale

= 0 (c'è equilibrio)

$$T_{cos\alpha}(x,t) = T(x,t) \cos \alpha(x,t)$$

quindi: $T_{cos\alpha} = T_{cos\alpha}$

$$T(x+\delta x, t) \cos \alpha(x+\delta x, t) - T(x, t) \cos \alpha(x, t) = 0 \text{ cioè}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [T(x, t) \cos \alpha(x, t)] = 0$$

quindi in generale \Rightarrow solo per $\alpha = 0$

$$T(x, t) \cos \alpha(x, t) = T_0(t)$$

perché la costante in generale è $T_0(t)$ $\Rightarrow T(x+\delta x, t) \cos \alpha(x+\delta x, t) = T(x, t) \cos \alpha(x, t) = 0$

Bilancio in verticale: $T_{sen\alpha}(x,t) = T(x,t) \sin \alpha(x,t) =$

$$\Rightarrow T_{sen\alpha}(x,t) =$$

$$= \frac{T_0(t)}{\cos \alpha} \sin \alpha = T_0 \tan \alpha$$

$$= T_0(x,t) \tan \alpha(x,t) = T_0(x,t) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$$

Eqz di Newton: "sulle forze verticali = ma" quindi:

$$T_0(t) \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x+\delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right] + (F) = (m) a$$

Sia $f(x,t)$ la forza che agisce sull'estremo di tempo t , in un istante di tempo

anche la forza $f(x,t)$ che agisce sull'estremo sul tratto di

filo e guidici

$$f(x,t) dm = f(x,t) \cdot \rho_0(x) dx = (*)$$

$$(\heartsuit) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} (x,t) dm = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} (x,t) \rho_0(x) dx$$

$$\Rightarrow \tau_0(t) \left[\frac{\partial u}{\partial x} (x+dx,t) - \frac{\partial u}{\partial x} (x,t) \right] + f(x,t) \rho_0(x) dx = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} (x,t) \rho_0(x) dx$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} (x,t) - \frac{\tau_0(t)}{\rho_0(x)} \left[\frac{\partial u}{\partial x} (x+dx,t) - \frac{\partial u}{\partial x} (x,t) \right] \right) dx = f(x,t) dx$$

→ (per $dx \rightarrow 0$ e) $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} (x,t) - \frac{\tau_0(t)}{\rho_0(x)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (x,t) = f(x,t)$$

Supponiamo che il filo è ripreso ma non oscilla, cioè

$$\rho_0(x) = \rho_0 = \text{costante}$$

Se il filo è molto teso e vibrando si distende per dalle potenze e ripreso allora ($\tau_0(t)$ voce di poter) la variazione relativa di τ_0 è trascurabile

$$\tau_0(t) \approx \tau_0 = \text{costante}$$

⇒ $\frac{\tau_0}{\rho_0}$ ha dimensioni di una (velocità)²

$$\frac{F}{m/l} = \frac{ma}{m/l} = a \cdot l = \left[\frac{m}{s^2} m \right] = \left[\frac{m^2}{s^2} \right] = \left(\frac{m}{s} \right)^2$$

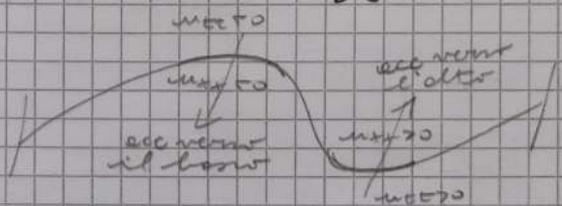
⇒ $\frac{\tau_0}{\rho_0} := c^2$ e si ovvia a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)$$

che è l'eqt omogenea (non) della corde vibrante.

- se $f=0$ si ha $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

non deve avere lo stesso segno di u



ha risposta lineare

Calcoliamo, nel caso $f=0$, l'energia necessaria totale di un trattor di corda l, c, τ_0 .

$$E_{\text{mecc}} = U_{\text{tensione}} + U_{\text{momento}}$$

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} (x,t) \right)^2 \left(\rho_0(x) dx \right)$$

$$E_{\text{cin}} = \int_0^l \frac{1}{2} \rho_0(x) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 (x,t) dx = E_{\text{cin}} \text{ del } \text{tensore}$$

E_{pot} si risolve la

$$\text{tensione: } T(x,t) = \sqrt{\tau_{\text{cin}}^2 + \tau_{\text{pot}}^2} =$$

$$= \sqrt{\tau_0(t)^2 + \tau_0(t)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 (x,t)} =$$

$$= \tau_0(t) \sqrt{1 + u_x^2}$$

Supponiamo che $\rho_0(x) = \rho_0$ e $\tau_0(x) = \tau_0$, allora

$$\sqrt{1 + u_x^2} \approx 1 \quad | \quad |\tau| \approx \tau_0 \quad \Rightarrow \approx \tau_0$$

$\text{Lavoro} = \tau_0 \cdot (\text{allungamento della corda})$
 $\tau_0 \cdot \delta x = \sqrt{1+u_x^2} \delta x - \delta x$

$\Rightarrow E_{pot} = \tau_0 \delta x (\sqrt{1+u_x^2} - 1) \approx \frac{1}{2} \tau_0 u_x^2 \delta x$

E_{pot} all'interno +

$E_{pot} = \int_0^l \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2(x,t) \tau_0 dx$

Scriviamo quella totale ora:

$E_{tot} = \frac{1}{2} \int_0^l \rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \tau_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx =$

$= \frac{\rho_0}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx = E(t)$

la di t ancora

Problema che si risolvono per l'eqz della corda vibrante.

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)$

E' un'eqz di evoluzione (come trasporto e calore), ma rispetta x e t e' del 2° ordine in t e x

Quindi se pot' convergono le ci.

(1) Problema di Cauchy globale

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \\ u(x,0) = g(x) \\ u_t(x,0) = h(x) \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ \text{(ad un'istante)} \\ \text{ovvero per tutte le altre} \\ (x \in \mathbb{R}) \text{ in ogni istante} \\ (t \in \mathbb{R}) \end{array} \right.$$

ovvero per tutto il volume iniziale della corda

(2) Problemi sul segmento, con ci di Cauchy e cc

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \quad x \in (0,l), t > 0$

$u(x,0) = g(x) \quad (x \in (0,l))$

$u_t(x,0) = h(x)$

+ cc

$(x=0, x=l; t > 0)$

con la giusta agli estremi

- Dirichlet: $u(0,t) = \alpha(t), u(l,t) = \beta(t)$ e qui spesso $u(0,t) = u(l,t) = 0$

- Neumann: $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0$



corda che non vibra agli estremi, meh

Ora (o vortice) per quel per la corda vibrante

Cauchy-Dirichlet e Cauchy-Neumann (esistono).

Nella classe di $f \in C^2((0,l) \times (0,T)) \cap C^1([0,l] \times [0,T])$

se $f \Rightarrow$ e' unica.

Dem. Se $u_t = 0$ e $u = 0$ sono sol. dello stesso problema, allora

$u = u_t = 0$ e sol. di

Consideriamo per questa u l'energia:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & | \quad x \in (0, l) \quad t > 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = 0 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{ci} \\ \text{nulla} \end{array} \right\}$$

$$\begin{cases} u(0, t) = u(l, t) = 0 \\ u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{eppure} \\ \text{nulla} \end{array} \right\} \text{cc}$$

$$E(t) = \frac{1}{2} \rho_0 \int_0^l [u_t^2 + c^2 u_x^2] dx =$$

- Vedremo che
- $E(t)$ è costante
 - $E(t) = 0$
 - quindi $u = 0 \Rightarrow \text{sol!}$

Calcoliamo $E'(t)$:

$$E'(t) = \frac{\rho_0}{2} \int_0^l [2u_t u_{tt} + c^2 \cdot 2u_x u_{xt}] dx$$

$$\int_0^l u_x u_{xt} dx = u_x u_t \Big|_0^l - \int_0^l u_{xx} u_t dx$$

$$u_x(l, t) u_t(l, t) - u_x(0, t) u_t(0, t)$$

- se ho cc Neuman allora $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$

- se ho cc Dirichlet allora $u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad \forall t$, ma magari se il bt

$\Rightarrow u_t(0, t) = u_t(l, t) = 0$ dimo e non occorre

In ogni caso allora quella parte è nulla

quindi: energia

$$E'(t) = \rho_0 \int_0^l u_t (u_{tt} - c^2 u_{xx}) dx = 0$$

$\Rightarrow E(t) = \text{costante} \quad \forall t = E(0) = 0$, quella cost è zero

Infatti $E(0) = \frac{\rho_0}{2} \int_0^l [u_t^2 + c^2 u_x^2](x, 0) dx$

27/03

Supponiamo che le ci sono nulle

$\Rightarrow u_t(x, 0) = 0 \quad \forall x$
 $u(x, 0) = 0 \quad \forall x \Rightarrow$ anche $u_x(x, 0) = 0$ tutto zero e t costante

quindi $E(t) = 0 \Rightarrow u_t = 0, u_x = 0$ in $(0, l) \times [0, T]$

Quindi u è costante, ma

$u(x, 0) = 0 \Rightarrow u \equiv 0 \Rightarrow \text{sol!} \quad \square$ "ma è la bc identicamente nulla"

Problema di CD per la corda vibrante con vincoli agli estremi. (eqz omogenea)

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & | \quad x \in (0, l), t > 0 \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 & | \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

perché omogenea al tempo dell'eqz del calore

Metodo: separazione delle variabili.
 Cerchiamo

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$$

Imponiamo nodi, l'eqz, e diventa:

$$X(x) T''(t) - c^2 X''(x) T(t) = 0$$

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{X''}{X} \quad \text{vale } \forall t > 0, \forall x \in (0, l)$$

$$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}: \frac{X''}{X} = \lambda = \frac{T''}{c^2 T}$$

$$\frac{X''}{X} = \lambda \quad X'' = \lambda X \quad \text{che è una EDO}$$

Se vogliamo che sia $u(0, t) = u(l, t) = 0$ senza chiedere
 $X(0) = X(l) = 0$

Ando a mi qual eqb autendow $\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x) \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \quad x \in (0, l)$

che è lo stesso qual ottenuto
 studiando il caso del calore omogeneo nel regime
 con condizioni $u=0$ eqb estremi.

Conclusione: la rls sono

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$n = 1, 2, \dots$$

$$\lambda_n = -\frac{n^2 \pi^2}{l^2}$$

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \lambda \quad T''(t) = \left(-\frac{n^2 \pi^2 c^2}{l^2}\right) T(t) \quad n = 1, 2, \dots$$

che da' come
 rls ancora

$$T(t) = a_n \cos\left(\frac{n\pi c t}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c t}{l}\right)$$

Ando di rls e non separate sono $X_n \cdot T_n$ quindi

$$u_n(x, t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \left\{ a_n \cos\left(\frac{n\pi c t}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c t}{l}\right) \right\}$$

Ogni un modo per l'eqb differenziale e le cc. Per
 risolvere esse le cc conclusioni

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \left\{ a_n \cos\left(\frac{n\pi c t}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c t}{l}\right) \right\}$$

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) a_n$$

$$t=0 \Rightarrow a_n \cos(0) = a_n \cdot 1 = a_n$$

$$b_n \sin(0) = b_n \cdot 0 = 0$$

che sul
 solo tempo

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

Copp di Fourier della rls in rls di rls
 rls di $f(x)$ come fanno alla rls
 rls di rls

$$u_t(x, 0) = g(x)$$

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) b_n \frac{n\pi c}{l} = g(x)$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^l g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

Ando la condizione rls sul problema e la $u(x, t)$
 rls per (*) con a_n, b_n rls come rls

Condizione \Rightarrow obvertimento di g su $[0, l]$ e g continua e $g(0) = g(l) = 0$
 la (*) essere regolare una volta del polinomio.
 avere la serie del t.l. di Fourier.

a differenza delle serie del coseno per la serie la funzione g converge (uniformemente) ovunque.

Per poter affermare che la serie di Fourier in convergenza totale (e una volta continua allora) sono regere che

$$\sum |a_n| + |b_n| \text{ converge}$$

$$\Rightarrow \text{serie regere} \quad \begin{cases} u(x, 0) = g(x) \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{se la condizione} \\ \text{regolare in } (x, t) \\ \text{diretta} \end{array} \right\}$$

Per sapere che $u \in C^2$ deve regere che

$$\sum n^2 (|a_n| + |b_n|) \text{ converge}$$

Def. (velocità di convergenza e serie di coeff. di Fourier)
 Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodica di periodo T , e supponiamo che per un certo intero $n = 1, 2, \dots$ sia vero che

- $f \in C^n(\mathbb{R})$ la n -esimità della f
 \Rightarrow per avere un certo numero di nodi di raccordo
- f' regolare e tratti in $[0, T]$

Allora i coeff. di Fourier a_n, b_n di f soddisfanno

$$\sum n^{\alpha} (|a_n| + |b_n|) \text{ converge}$$

In particolare: $a_n, b_n = O(1/n^{\alpha})$

* e questo rapporto grande eccellente: $f \in C^0$, conti e raccordo ($f(0) = f(T)$), regolare e tratti.

Orbita nel mezzo con

- vogliamo sapere che $\sum n^2 |a_n| < +\infty$, dove

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

coeff. di Fourier di $\tilde{f}(x)$ riflessa originale di f

Per sapere che la \tilde{f} è regolare e tratti, con \tilde{f}'' continua e tratti

$$\Rightarrow f \in C^2[0, l]$$



$$f(0) = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{condizione di} \\ \text{raccordo} \end{array} \right) \quad \tilde{f}(l) = \tilde{f}(-l) = 0 \quad f''(0) = f''(l) = 0$$

$$\begin{aligned} \tilde{f} &\Rightarrow \tilde{f}' \\ \text{deriv} &\quad \text{deriv} \\ \tilde{f}' &\Rightarrow \tilde{f}'' \\ \text{deriv} &\quad \text{deriv} \end{aligned}$$

tutta e parte

Andrà: se $f \in C^1[0, l]$, f' regolare e tratti, $f(0) = f(l) = 0$, $f''(0) = f''(l) = 0$

allora $\Rightarrow \sum n^2 |a_n| < +\infty$

è nulla la serie riflessa $\tilde{f}(x)$

(b) $\sum n^2 |b_n| \sim \sum n |B_n|$ con B_n coeff. di Fourier di $h(x)$

Ci serve che $\tilde{h} \in C^1(\mathbb{R})$, \tilde{h}' regolare e tratti, $h(0) = h(l) = 0$

Andrà se $h \in C^1[0, l]$, h' regolare e tratti, $h(0) = h(l) = 0$

allora $\Rightarrow \sum n^2 |b_n| < +\infty$

Val. Se f la soddisfa la legge fatta sopra, allora
 la $u(x,t)$ esecrata in (x) e' l' una sola
classe del tipo di Carlier-Dencllet.

anche per come nel tempo non c'è nessun problema

Se per cui ottenere una stima di stabilità
 prendiamo la (x) e t + interazione costante costante
 la $\| \cdot \|_{L^2}$ in x .

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \left\{ a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) \right\}$$

$$\int_0^l |u(x,t)|^2 dx = \text{per la Parseval su SA} \\ \text{e} \text{ moltiplicando per } l \\ = \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ a_n^2 + b_n^2 \right\} \frac{l}{2} = C \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) \frac{l}{2} =$$

$$- g(x) = \sum a_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad - b_n = \beta_n \frac{l}{n\pi c} \\ \Rightarrow \|g\|_{L^2}^2 = \sum a_n^2 \frac{l}{2} \quad \sum b_n^2 = \left(\frac{l}{\pi c}\right)^2 \sum \frac{\beta_n^2}{n^2} =$$

$$h(x) = \sum \beta_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$\Rightarrow \|h\|_{L^2}^2 = \sum \beta_n^2 \frac{l}{2}$$

$$\Rightarrow \|u\|_{L^2}^2 \leq \|g\|_{L^2}^2 + c \|h\|_{L^2}^2$$

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(\cdot, t)\|_{L^2(0, l)}^2 \leq \|g\|_{L^2}^2 + c \|h\|_{L^2}^2$$

che e' la stima di stabilita'.

La rela di due problemi le si trovano in piccolo
scarto in norma L2 avendo in piccolo scarto

Prendiamo la

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \left\{ a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) \right\}$$

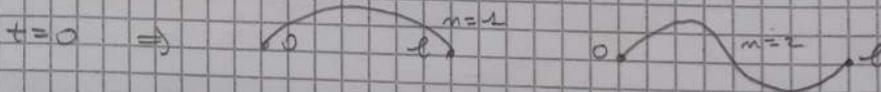
studiamo l'aspetto dei primo termini

Come e' fatto

una tra del tipo:

$$u_n(x,t) = \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right)$$

p. 274



Per $t > 0$ ogni particella della corda vibra di modo
armonico, di periodo

$$\cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) \Rightarrow T = \frac{2 \cdot l}{n\pi c} = \frac{2l}{nc} = T_n \quad (T_1 = \frac{2l}{c})$$

Ogni numero di armonici di questo tipo e anche
T1 periodico, perche'

$$T_n = \frac{1}{n} \cdot T_1$$

\Rightarrow ogni vibrazione di una corda costa ogni armonico e

$$\text{frequenza } \nu_n = \frac{1}{T_n} = n \frac{c}{2l}$$

$v_n = n v_1$ / $(T_n = \frac{1}{n} T_1)$

Le frequenze delle corde sono multiple intere delle prime.

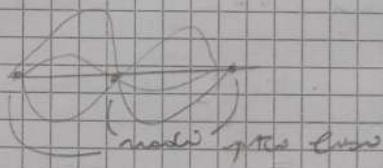
Le frequenze delle corde sono multiple intere delle prime. Le frequenze delle corde sono multiple intere delle prime.

Il termine n-esimo ha frequenza $v_n = n v_1$

La frequenza di una corda che vibra libera non è la stessa della frequenza di una corda che vibra libera.

(v_1 : frequenza fondamentale, per cui non è successiva) e ogni armonica di v_1 corrisponde a volte a note di un'ottava.

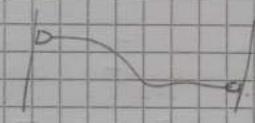
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
$\frac{v_1}{1}$	$\frac{v_1}{2}$	$\frac{v_1}{3}$	$\frac{v_1}{4}$	$\frac{v_1}{5}$	$\frac{v_1}{6}$	$\frac{v_1}{7}$	$\frac{v_1}{8}$



corde libera alle n, con n = numero di nodi

Problema di Cauchy (Cauchy-Kovalevsky) per le equazioni iperboliche.

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0 \\ u(x,0) = \dots \\ u_t(x,0) = \dots \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$



Separazione di variabili. Come prima trovata

$X'' = \lambda X, \quad T'' = \lambda c^2 T$

ma ora le ci conviene: $\begin{cases} X'' = \lambda X \\ X'(0) = X'(l) = 0 \end{cases}$

che si trova come il modo di Cauchy se il valore sul rettilineo. Quindi otteniamo i cos:

$X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad n = 0, 1, \dots$

$\lambda = -\frac{n^2 \pi^2}{l^2}$

Per $T'' = -\frac{n^2 \pi^2 c^2}{l^2} T$ \rightarrow come prima per $n \geq 1$: $T_n(t) = a_n \cos\left(\frac{n\pi c t}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c t}{l}\right)$

$T'' = 0$ per $n = 0$:

$T''(t) = 0 \Rightarrow T(t) = a_0 + b_0 t$

Quindi le costanti sono a del tempo

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \frac{b_0 t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \left\{ a_n \cos\left(\frac{n\pi c t}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c t}{l}\right) \right\}$$

(*) $u(x,0) = g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$

Come fare sviluppo di una serie di potenze: col risultato per i nodi.

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \quad n=0,1,\dots$$

$$u_f(x,0) =: b(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \underbrace{\frac{b_n \frac{n\pi c}{l}}{l}}_{B_n}$$

Conoscendo l'espansione in serie di Fourier delle $b(x)$:

$$B_n = \frac{2}{l} \int_0^l b(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \quad n=0,1,\dots$$

$$\Rightarrow b_n = B_n \frac{l}{n\pi c} \quad n=1,2,\dots$$

Conoscendo la gente della $u_f(x,t)$ e strutture col termine $\frac{b_0}{2} + \dots$, che sarebbe oscillazione stazionaria.

Ma se a $t=0$ la velocità u_t è uguale alla media $\frac{1}{l}$ nella nulla lunghezza $0 < x < l$ allora u_t è armonica.

Eqz della corda vibrante allungata. Case globale

$$\text{cas } \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = b(x) \end{cases} \quad \left| \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \right. \quad \begin{array}{l} \text{la soluz. } \exists \text{ unica} \\ \text{loc. } \text{ } \end{array}$$

Ando più e' in caso in cui numerario e denario l'ipotesi u_t ando il $t=0$ di u_{tt} $c^2 u_{xx}$ valore nel caso $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ compare non e' interesse.

Si riesce a determinare l'ipotesi dell'eqz, col metodo di D'Alembert, nel caso di non uniforme.

Car: $\begin{cases} \xi = x+ct \\ \eta = x-ct \end{cases}$ e rispetto l'eqz rispetto alle nuove variabili ξ e η .

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = u_\xi + u_\eta$$

quindi $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}$ come esercizio calcola proprio come cosa un prodotto

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) u = \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] u$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = c \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right) u$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right) c \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right) u = c^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] u$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 (u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) + c^2 (u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) = -4c^2 u_{\xi\eta}$$

Ricerca:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow u_{xx} = 0$$

perché in una stringa piana, immutabile

$u_{xx} = 0$ vuol dire

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \text{ non dipende da } x$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_1(y), \text{ quindi}$$

$$u(x, y) = \int f_1(y) dx = f_2(y) + f_3(x)$$

$$u(x, y) = f_2(y) + f_3(x)$$

"+C" per la y

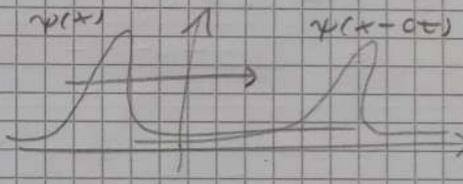
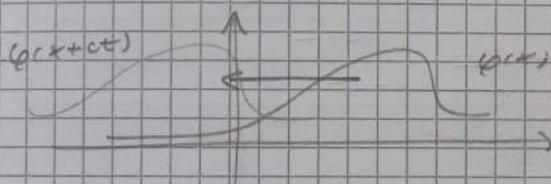
Proviamo ad x/t :

$$u(x, t) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct)$$

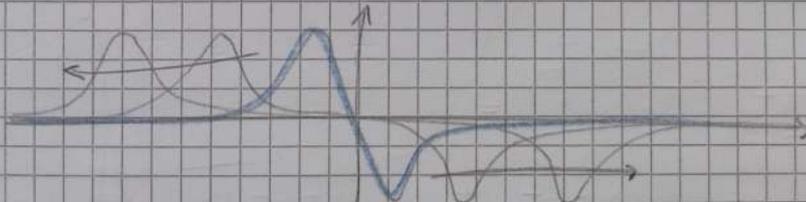
per due perché $\varphi, \psi \in C^2(\mathbb{R})$. E questo è l'oscillazione della corda in movimento

E quello che si muove non è il movimento della corda.

Che cosa ha l'oscillazione?



\Rightarrow Ad ogni istante abbiamo su una corda oscillante e sinusoidale di un'onda progressiva e un'onda regressiva



Proviamo al y/t . Proviamo le u .

$$u(x, t) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct)$$

$$u(x, 0) = g(x)$$

$$u_t(x, 0) = h(x)$$

quello domanda è: non per la corda $\varphi + \psi = g$, che significa $\varphi = g$ e $\psi = 0$

$$\bullet u(x, 0) = \varphi(x) + \psi(x) = g(x)$$

$$\bullet u_t(x, 0) = \varphi'(x+ct) \cdot c + \psi'(x-ct) \cdot (-c)$$

$$u_t(x, 0) = c(\varphi'(x) - \psi'(x)) = h(x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi(x) + \psi(x) = g(x) \\ c(\varphi'(x) - \psi'(x)) = h(x) \end{cases}$$

dividiamo la prima

$$\begin{cases} \varphi' + \psi' = g' \\ \varphi' - \psi' = h/c \end{cases} \downarrow (+)$$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2} \left(g'(x) + \frac{h(x)}{c} \right)$$

$$\psi'(x) = \frac{1}{2} \left(g'(x) - \frac{h(x)}{c} \right)$$

Integriamo:

$$\varphi(x) = \int_0^x \varphi'(y) dy = \frac{1}{2} \int_0^x g'(y) + \frac{h(y)}{c} dy + c_1$$

$$\psi(x) = \int_0^x \psi'(y) dy = \frac{1}{2} \int_0^x g'(y) - \frac{h(y)}{c} dy + c_2$$

$$u(x,t) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} (g(x) - g(0)) + \frac{1}{2c} \int_0^x h(y) dy + c_1$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2} (g(x) - g(0)) - \frac{1}{2c} \int_0^x h(y) dy + c_2$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \left(g(x+ct) + g(x-ct) \right) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2c} \left\{ \int_0^{x+ct} h(y) dy - \int_0^{x-ct} h(y) dy \right\} + c_1 + c_2$$

$\begin{aligned} \varphi(x) + \psi(x) &= g(x) \\ g(x) + c_1 + c_2 &= g(x) \\ \Rightarrow c_1 + c_2 &= 0 \end{aligned}$

$$u(x,t) = \frac{g(x+ct) + g(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y) dy + c_1 + c_2$$

mettiamo per derivare nell'altro
 altre costanti (g(0), ecc)

$$u(x,t) = \frac{g(x+ct) + g(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y) dy + c_1 + c_2$$

o dall'ipotesi $u(x,0) = g(x) \Rightarrow c_1 = 0$

che è la formula di D'Alembert.

Lettera può dirsi vera? La ricerca dell'ipotesi
 aveva tutto francese, equivalenti. Dalla come viene
 chiedere

$$g \in C^2(\mathbb{R}) \quad h \in C^1(\mathbb{R})$$

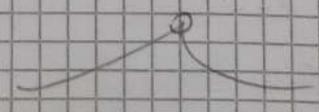
$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y) dy \right) = \frac{1}{2c} \{ c \cdot h(x+ct) + c \cdot h(x-ct) \}$$

se derivo ancora e
 annulla e $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t}$ deriv
 parte derivata ancora
 \Rightarrow deriv $h \in C^1$

\Rightarrow $g \in C^2(\mathbb{R})$ e $h \in C^1(\mathbb{R})$ $\nexists!$ una rel. sul \mathbb{R}^2 globale
 che sia $\in C^2(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$ ed es. energia della
 formula di D'Alembert.

notiamo che affinché la $u(x,t)$ sia definita e continua
 è sufficiente chiedere $g \in C^0(\mathbb{R})$, $h \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Da un caso strettamente locale C^0 ma non C^2 in generale



prevedo le curve con rito
 angolari, ma alcuni si regolano

So può dar conto a questo tipo di rel. non regolari col
 carattere di rel. debole, che vedremo.

Dalla formula di D'Alembert si trae anche una stima
 di stabilità (nel caso $u \in C^2$).

$$u(x,t) = \frac{g(x+ct) + g(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y) dy$$

non solo non
 realizza

$$|u(x,t)| \leq \frac{|g(x+ct) + g(x-ct)|}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} |h(y)| dy =$$

$$\leq 2 \max_{\mathbb{R}} |g| \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2c} \max_{\mathbb{R}} |h| \cdot 2ct$$

re cerchiamo

$$\sup_{x \in \mathbb{R}, t \in [0, T]} |u(x,t)| \leq$$

$$\leq \max_{x \in \mathbb{R}} |g(x)| + T \cdot \max_{x \in \mathbb{R}} |h(x)|$$

(maggiore valle)
= su cui ↓

Per l'entità, se usiamo una sola r.a. di due punti di Cauchy con cui g_1, h_1 e g_2, h_2 rispettivamente; ovvero

$$\max_{x \in \mathbb{R}, t \in [0, T]} |u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leq$$

$$\leq \max_{x \in \mathbb{R}} |g_1 - g_2| + T \cdot \max_{x \in \mathbb{R}} |h_1 - h_2|$$

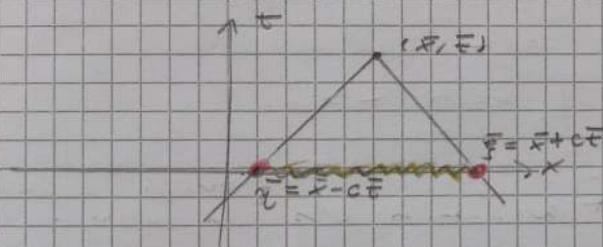
2) eqz non regolazione. Esempio: $h \equiv 0, g \in C^1 \Rightarrow u \in C^1$

non c'è una "⇒ u ∈ C^1" stretta. Altre osservazioni:

Dovuto di dipendenza e di influenza.

Il sistema $\bar{x} \in \mathbb{R}, \bar{t} > 0$, chiediamoci: $u(\bar{x}, \bar{t})$ dipende } u
da quali valori delle ci? } g, h

$u(x=0, t=0)$ come tenere traccia delle ci?



tra 2 rette $x \pm ct = \text{costante}$

$$x + ct = \bar{x} + c\bar{t} = \bar{x}$$

$$x - ct = \bar{x} - c\bar{t} = \bar{x}$$

cerchiamo quelle che
 \bar{x} tra (\bar{x}, \bar{t})

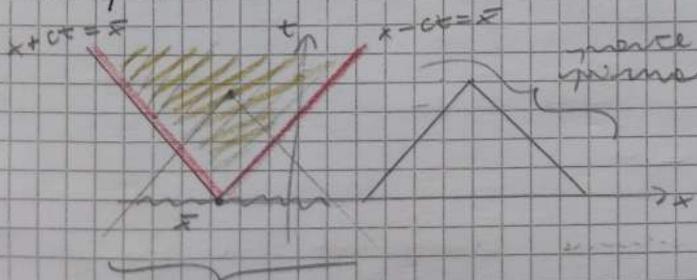
$$u(x,t) \Big|_{\bar{x}, \bar{t}} = \frac{g(\bar{x} + c\bar{t}) + g(\bar{x} - c\bar{t})}{2} + \frac{1}{2c} \int_{\bar{x} - c\bar{t}}^{\bar{x} + c\bar{t}} h(y) dy$$

la dipendenza da g è in quei due punti
 quella da h è in quell'intervallo

Quell'intervallo $[\bar{x} - c\bar{t}, \bar{x} + c\bar{t}] = [\bar{x}, \bar{x}]$ è detto
intervallo di dipendenza di $u(\bar{x}, \bar{t})$.

Ora, il valore di g e h in (\bar{x}) influenzano la
 r.a. $u(x,t)$ in prob (x,t) } u
 } g, h

Entriamo nel cerchio di dominio di influenza. Riconosciamo
 il graf.



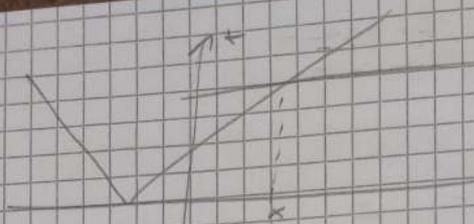
grafica rete traccia da quale
 regione, \bar{x} e \bar{t} dipendono

Il valore di g e h in
 \bar{x} influenzano il
 valore di u nei pt

$$\left\{ (x,t) : \bar{x} - ct \leq x \leq \bar{x} + ct \right. \\ \left. t > 0 \right\}$$

case l'area
 che è il dominio
 di influenza

La dipendenza è su certi valori perché l'informazione
 non viaggia a velocità infinite.



due t' e t'' e ne
emergono

non conta soltanto non
emergono, solo alle
solite delle corde!

Es: non emergenza della corda vibrante (illimitata).

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t) \\ u(x,0) = g(x) \\ u_t(x,0) = h(x) \end{cases} \quad | \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

Unico al principio di sovrapposizione.
 Se u_1 e solt con $g, h, f=0$
 Se u_2 e solt con $g=h=0, f$

$\rightarrow u = u_1 + u_2$ e solt del qual è null

se lo riprova anche, studiano in. Vaghiamo
mobile

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t) \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases} \quad | \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

Se come il retrolo di Dubrovnik. Ma pu nel tempo
rimu nel 2° ordine (per come colui o trovarlo
che erano del 1° nel tempo \rightarrow il retrolo cambia).

(1) definiamo $w(x,t,\tau)$ la solt del qual

$$\begin{cases} w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0 \\ w(x,\tau, \tau) = 0 \\ w_t(x,\tau, \tau) = f(x,\tau) \end{cases} \quad | \quad x \in \mathbb{R}, t > \tau$$

} ce trattano con le ci. Cioè
sul qd $w = f$ lo facciamo sempre
sulla sinistra

(2) definiamo $u(x,t) = \int_0^t w(x,t,\tau) d\tau$ la solt migliore

anche insieme?

$$u_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^t = \int_0^t w_{xx}(x,t,\tau) d\tau$$

} termine principale
della solt

$$u_t(x,t) = w(x,t,t) + \int_0^t w_t(x,t,\tau) d\tau$$

= 0 dalle ci
del moto in w

$$u_{tt} = w_{tt}(x,t,t) + \int_0^t w_{tt}(x,t,\tau) d\tau$$

$= f(x,t)$ $= 0$ e solt, lo w

$$\Rightarrow \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t) + \int_0^t (w_{tt} - c^2 w_{xx}) d\tau = \\ = f(x,t), \text{ la } u \text{ e solt (anzi)} \\ \text{dell' eqt} \end{cases}$$

$$u(x,0) = 0 \text{ perche } \int_0^0 = 0$$

$$u_t(x,0) = 0 + \int_0^0 = 0 \text{ anche, dove } u_t \text{ era pu}$$

Applicare la formula di D'Alembert per trovare la w .
 Con $g=0$ e $h=f(x,\tau)$ e $t = t - \tau = \tau - \tau$

$$\Rightarrow w(x,t,\tau) = \frac{1}{2c} \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(y,\tau) dy$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \int_0^t \frac{1}{2c} \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(x,\tau) d\tau d\tau$$

condizione
lemla per:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

altro prob lap su f la formula per la u e' valida?

$$u_x = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t \frac{1}{2c} \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(x,\tau) d\tau d\tau$$

per pu f sempre C⁰ perche' con / integrando = c | f | (cred?)

$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} u_x = \int_0^t \frac{1}{2c} \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f_x(x,\tau) d\tau d\tau$$

\Rightarrow chiediamo $f \in C^0(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$, $f_x \in C^0(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$

$$u_{tt}(x,t) = \int_0^t \frac{1}{2c} \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} \{ f(x+c(t-\tau), \tau) + f(x-c(t-\tau), \tau) \} d\tau d\tau$$

$u_{tt}(x,t)$ = ancora la t o e' via all'estremo (\rightarrow metri $2c$)
e la parte destra, la $\partial/\partial t$ nell'integrale
che e' costante

$$= \frac{1}{2c} \int_0^t \{ c f(x,t) + c f(x,t) \} + \int_0^t \frac{1}{2c} \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} \{ c^2 f_x(x+c(t-\tau), \tau) - c^2 f_x(x-c(t-\tau), \tau) \} d\tau d\tau$$

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t) + \int_0^t \frac{1}{2c} \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} \{ c^2 f_x(A) - c^2 f_x(B) - c^2 f_x(A) + c^2 f_x(B) \} d\tau d\tau = f(x,t)$$

$$u(x,0) = 0 \text{ per } \int_0^0$$

$$u_t(x,0) = 0 \text{ anche lei dalle } u_t \text{ sempre costante}$$

Un. Se $f(x,t) \in C^0(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$ e $\exists \frac{\partial f}{\partial x} \in C^0(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$

allora la sol del prob

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

F! ed e' data dalla
formula detta sopra

! perche' se chiedo la solf ma la sol e' cb
cb e' unica del tlu del caso omogeneo
(dove la c' e' 0! perche' \exists l'integrale generale)

$$E_2 (E_1) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = \sin^3(\pi x) \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x \in (0,1), t > 0 \\ \rightarrow g(x) \\ \rightarrow h(x) \end{matrix}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \left\{ \underbrace{a_n \cos\left(\frac{n\pi c t}{l}\right)}_{g} + \underbrace{b_n \sin\left(\frac{n\pi c t}{l}\right)}_{h} \right\}$$

$a_n =$ coeff della sviluppo in serie della
 $g(x)$ in soli seni

$g(x) = \sin^3(\pi x)$ e' dispari \Rightarrow si pu' no' la serie ha
es' solo termini seni

$$\begin{aligned} \sin^3(\pi x) &= \sin^2(\pi x) \sin x = \\ &= \left(\frac{1 - \cos(2\pi x)}{2} \right) \sin x = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \sin x \cos(2\pi x) = \\ &= \frac{1}{2} \sin(\pi x) - \frac{1}{4} (\sin(3\pi x) + \sin(-\pi x)) = \\ &= \frac{3}{4} \sin(\pi x) - \frac{1}{4} \sin(3\pi x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{3}{4} \sin(\pi x) \cos(\pi c t) - \frac{1}{4} \sin(3\pi x) \cos(3\pi c t)$$

Caso regolare: $f \in C^\infty$ e $u \in C^\infty$

$$(E2) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = 1 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} x \in (0, l), t > 0 \\ \rightarrow g(x) \\ \rightarrow h(x) \end{array} \right.$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \left\{ b_n \sin\left(\frac{n\pi c t}{l}\right) \right\}$$

$$\partial_t u = u_t = \dots \quad b_n \frac{n\pi c}{l} \cos(\dots) \quad (l=1)$$

$$\Rightarrow h(x) = 1 = \sum \beta_n \sin(n\pi x), \quad \beta_n = b_n n\pi c$$

$$\begin{aligned} \beta_n &= 2 \int_0^1 1 \cdot \sin(n\pi x) dx = 2 \left[-\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} \Big|_0^1 \right] = \\ &= \frac{2}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2 \pi^2 c} (1 - \cos(n\pi x)) \sin(n\pi x) \sin(n\pi c t)$$

La serie converge totalmente, e con ρ costante $\Rightarrow u \in C^0$, ma la soluzione C^2 .

$$(E3) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = x(l-x) \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} x \in (0, l), t > 0 \\ \circ \quad \bullet \end{array} \right.$$

Ci con curva di parabola e velocità nulla

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \left\{ a_n \cos\left(\frac{n\pi c t}{l}\right) \right\}$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l (x(l-x)) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx =$$

$$= \frac{2}{l} \left\{ (x)(l-x) \left(-\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right) \Big|_0^l \cdot \frac{l}{n\pi} + \right.$$

$$\left. + \int_0^l \frac{l}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) (l-2x) dx \right\} =$$

$$= \frac{2}{n\pi} \left\{ (l-2x) \frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}{\frac{l}{n\pi}} \Big|_0^l - \int_0^l (l-2x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \frac{l}{n\pi} dx \right\} =$$

$$= \frac{2}{n\pi} \left\{ + \frac{2l}{n\pi} \left(-\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cdot \frac{l}{n\pi} \right) \Big|_0^l \right\} =$$

$$= \frac{4l^2}{n^3 \pi^3} (1 - \cos(n\pi))$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{gl^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - \cos(n\pi x)}{n^3} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right)$$

La serie e la sua derivata convergono totalmente \Rightarrow abbiamo una $u \in C^1$ (non ancora il max, c^2)

$$(E4) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & | \quad x \in (0,1), t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = 1 - \cos(2\pi x) \end{cases} \begin{matrix} \rightarrow \mathcal{L} \\ \rightarrow \mathcal{L} \end{matrix}$$

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \frac{b_0 t}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \left\{ a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) \right\}$$

h.e. per la serie una serie di cos seni

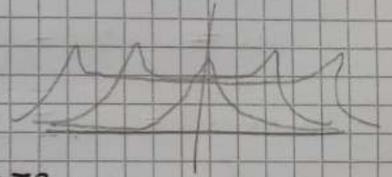
$$\Rightarrow h(x) = \frac{1}{2} - \cos(2\pi x) \quad = 1 \text{ in } t=0$$

trovare le b_n : $b_n = \frac{n\pi c}{l} \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right)$

$$b_2 2\pi c = -1 \quad b_2 = \frac{-1}{2\pi c}$$

$$u(x,t) = t - \frac{1}{2\pi c} \cos(2\pi x) \operatorname{sen}(2\pi ct)$$

$$(E5) \begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0 & | \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = e^{-|x|} \\ u_t(x,0) = \frac{1}{1+x^2} \end{cases} \begin{matrix} \rightarrow \mathcal{L} \\ \rightarrow \mathcal{L} \end{matrix} \quad c^2 = 4 \Rightarrow c = 2$$



$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{f(x+2t) + f(x-2t)}{2} + \frac{1}{4} \int_{x-2t}^{x+2t} h(y) dy = \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{-(x+2t)} + e^{-(x-2t)} \right) + \frac{1}{4} \operatorname{arctan} \Big|_{x-2t}^{x+2t} = \\ &= \frac{e^{-(x+2t)} + e^{-(x-2t)}}{2} + \frac{1}{4} \left(\operatorname{arctan}(x+2t) - \operatorname{arctan}(x-2t) \right) \end{aligned}$$

(funzione x) $\xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ $\xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{\pi}{4}$

$$(E6) \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & | \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = e^{-x^2} \\ u_t(x,0) = 3 \operatorname{sen}(2x) \end{cases} \begin{matrix} \rightarrow \mathcal{L} \\ \rightarrow \mathcal{L} \end{matrix} \quad (c=1) \quad \text{data } c^\infty \Rightarrow u \in C^\infty$$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2} \left(e^{-(x+t)^2} + e^{-(x-t)^2} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} 3 \operatorname{sen}(2x) dx = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \left(-\cos(2x) \cdot \frac{1}{2} \Big|_{x-t}^{x+t} \right) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \left(\cos(2(x-t)) - \cos(2(x+t)) \right) = \\ &= \frac{e^{-(x+t)^2} + e^{-(x-t)^2}}{2} + \frac{3}{4} \left(\cos(2t) - \cos(2t) \right) \end{aligned}$$

$\xrightarrow{t \rightarrow +\infty}$ $\xrightarrow{t \rightarrow -\infty}$ ris. la serie

$$(E7) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = \text{sen } x & | \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t \left(\frac{1}{2c} \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(\tau, s) d\tau \right) ds \\ &= \int_0^t \left(\frac{1}{2c} \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} \text{sen } \tau d\tau \right) ds = \\ &= \int_0^t \left[\frac{1}{2c} \left(\cos(x-c(t-s)) - \cos(x+c(t-s)) \right) \right] ds = \\ &= \frac{1}{2c} \int_0^t \left[\cos(x-cs) - \cos(x+cs) \right] ds = \\ &= \frac{1}{2c} \left[-\frac{1}{c} \text{sen}(x+cs) - \frac{1}{c} \text{sen}(x-cs) \right]_0^t = \\ &= \frac{1}{2c^2} \left[2 \text{sen } x - \text{sen}(x-ct) - \text{sen}(x+ct) \right] \end{aligned}$$

$$(E8) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = x e^{-t} \\ u(x, 0) = e^{-x^2} \\ u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

usando il metodo di D'Alembert

$$u = \text{rel} \left(\begin{cases} x e^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{cases} \right) + \text{rel} \left(\begin{cases} e^{-x^2} \\ 0 \\ 0 \end{cases} \right)$$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{e^{-(x+ct)^2} + e^{-(x-ct)^2}}{2} + \\ &+ \int_0^t \frac{1}{2c} \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} x e^{-s} d\tau ds = \\ &= \frac{1}{2c} \int_0^t \left[\frac{e^{-s}}{2} \left((x+c(t-s))^2 - (x-c(t-s))^2 \right) \right] ds = \\ &= \frac{1}{4c} \int_0^t e^{-s} (4xc(t-s)) ds = \\ &= \frac{1}{c} x \int_0^t e^{-s} (t-s) ds = \\ &= \frac{1}{c} x \left[-(t-s)e^{-s} \Big|_0^t + \int_0^t -e^{-s} ds \right] = \frac{1}{c} x (t + e^{-t} - 1) \\ &= x(t + e^{-t} - 1) + \frac{e^{-(x+ct)^2} + e^{-(x-ct)^2}}{2} \\ u(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} x t - x &= (t-1)x \end{aligned}$$

Eg+ della catteda vibrazioni, illecitate, formulazione debole. 24/03

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & | \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = h(x) \end{cases}$$

La sol+ era data dalla formula di D'Alembert

$$u(x, t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(\tau) d\tau$$

Se $f \in C^2(\mathbb{R})$ e $h \in C^1(\mathbb{R})$ allora $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$ era rel+ classica.

Ma considerando la def di u , per avere $u \in C^0$ (il minimo) basta avere $f \in C^0(\mathbb{R})$ e $h \in L^1(\mathbb{R})$

C'è un modo di dar senso a relt di qual pdc che non siano C^2 ?

Def. relt in senso debole di un pdc come sopra, che abbia senso per cui $g \in C^0$ e $h \in L^\infty$ necessariamente bene.

Se $u(x,t)$ una C^2 continua per $x \in \mathbb{R}, t \geq 0$, siamo $g \in C^0(\mathbb{R})$ e $h \in L^\infty(\mathbb{R})$. D'ora in poi u è relt debole del pdc

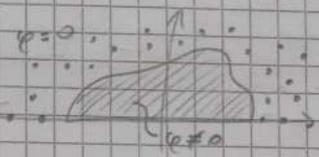
$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = g(x) \\ u_t(x,0) = h(x) \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0$$

se soddisfa un'identità integrale da ora ricaviamo.

Procediamo come l'altra volta (·φ test, 1) e parti, ecc).
 Sia $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$

Per $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$ tale da soddisfare l'eqt:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad (\cdot \varphi \text{ per } \int)$$



$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} [\varphi u_{tt} - \varphi c^2 u_{xx}] (x,t) dt dx = 0$$

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\int_0^{+\infty} (\varphi u_{tt}) dt \right] dx + \int_0^{+\infty} \left[\int_{\mathbb{R}} (\varphi u_{xx}) dx \right] dt \cdot (-c^2) = 0$$

• $B = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} (\varphi_{xx} u) dx dt$, *lavoro integrale per parti due volte dalle dualità!*

$$\begin{aligned} \cdot A &= \int_{\mathbb{R}} \left\{ \varphi u_t \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \varphi_t u_t dt \right\} dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left\{ 0 - \varphi(x,0) u_t(x,0) - \left[\varphi_t u \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \varphi_{tt} u dt \right] \right\} dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left\{ -\varphi(x,0) h(x) + \varphi_t(x,0) g(x) \right\} dx + \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} \varphi_{tt} u dt dx \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (\varphi_{tt} - c^2 \varphi_{xx}) u dt dx + \int_{\mathbb{R}} -\varphi(x,0) h(x) + \varphi_t(x,0) g(x) dx = 0$$

che è conseguenza dell'eqt con supporto in relt, ma non chiede per $u \in C^2$.

Altri diremo che u è relt debole se $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$
 o che

$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (\varphi_{tt} - c^2 \varphi_{xx}) u dt dx + \int_{\mathbb{R}} -\varphi(x,0) h(x) + \varphi_t(x,0) g(x) dx = 0$$

Def. Se $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$ è relt classica del pdc sopra, allora \Rightarrow è anche relt debole.

Per il contrario di abbiamo fatto (da qui u relt C^2 e ID).
 È solo ancora un caso speciale:

Def. Se $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$ è relt debole del pdc sopra, con $g \in C^0(\mathbb{R})$ e $h \in C^0(\mathbb{R})$,
 quindi si ricava dalle restituzioni di non C^2

allora \Rightarrow u è anche relt classica.

Dem. Come l'altra dm. Applicando l'ID della relt debole (punto 1) alla $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$.



$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (\varphi_{tt} - c^2 \varphi_{xx}) u \, dt \, dx + \phi = 0$$

se non fosse
 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$

ma $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ per cui, prendo integralmente per
 parte due volte. Si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} \varphi (u_{tt} - c^2 u_{xx}) \, dt \, dx = 0 \quad \forall \varphi$$

generalmente

giusto dal filo di annullamento, ed allora che $u' = 0$
 $\forall \varphi$ test implica che $u = 0$ per $x \in \mathbb{R}$
 $e \, t > 0$.

(2° passo) Supponiamo peraltro, mostriamo che un'onda
 esiste da cui. Necessariamente la def (1D) di una soluzione,
 per $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$.

$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (\varphi_{tt} - c^2 \varphi_{xx}) u \, dt \, dx + \int_{\mathbb{R}} g(x) \varphi_t(x, 0) - h(x) \varphi(x, 0) \, dx = 0$$

per parte due volte

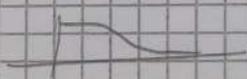
al passo 1

(dal 1° integrale)
 si annulla la seconda
 parte = termini
 di bordo

$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} \varphi (u_{tt} - c^2 u_{xx}) \, dt \, dx + \int_{\mathbb{R}} (g(x) u_t(x, 0) - (h(x) u(x, 0))) \varphi(x, 0) \, dx$$

Consideriamo $\varphi(x, t)$ del tipo $\varphi(x, t) = \varphi(x) \cdot T(t)$

sceglia $T: T(0) = 1$
 $T'(0) = 0$



$\Rightarrow \varphi(x, 0) = \varphi(x)$
 $\varphi_t(x, 0) = 0$

$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} (h(x) u_t(x, 0)) \varphi(x) \, dx = 0$
 $\Rightarrow u_t(x, 0) = h(x)$

Consideriamo ora la scelta $\varphi(x, t) = \varphi(x) \cdot T(t)$ ma con

sceglia $T: T(0) = 0$
 $T'(0) = 1$



$\Rightarrow \varphi(x, 0) = 0$ $\in C_0^\infty(\mathbb{R})$
 $\varphi_t(x, 0) = \varphi(x)$

$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} (g(x) - u_t(x, 0)) \varphi(x) \, dx = 0$
 $\Rightarrow u_t(x, 0) = g(x) \quad \square$

Def. Sia $g \in C^0(\mathbb{R})$, $h \in C^0(\mathbb{R})$ e

$$u(x, t) = \frac{g(x+ct) + g(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y) \, dy$$

Allora u è una soluzione di

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = h(x) \end{cases}$$

una coppia di funzioni
 di D'Alambert formate una
 soluzione di problema
 centrato di Cauchy

Dim. Per verificare mostriamo il caso $h=0$ (come ex).
 Teniamo mostriamo che se u è def come sopra, cioè

$$u(x, t) = \frac{g(x+ct) + g(x-ct)}{2}$$

allora $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$ si ha che un'onda l'1D:

$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} \frac{g(x+ct) + g(x-ct)}{2} (\varphi_{tt} - c^2 \varphi_{xx}) \, dt \, dx + \int_{\mathbb{R}} g(x) \varphi_t(x, 0) \, dx = 0$$

$$= \frac{1}{2} (I_1 + I_2) + I_3 = 0$$

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{\mathcal{R}} \int_0^{+\infty} g(x+ct) (\varphi_{tt} - c^2 \varphi_{xx}) (x,t) dt dx = \\
 &= \int_{\mathcal{R}} \int_0^{+\infty} g(\xi) (\varphi_{tt} - c^2 \varphi_{xx}) (\xi - ct, t) dt d\xi =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\mathcal{R}} g(\xi) \frac{d}{dt} [\varphi_t + c\varphi_x] (\xi - ct, t) dt d\xi = \\
 &= \left(\varphi_{tt} + \varphi_{xx}(-c) \right) + c \left(\varphi_{tx} + \varphi_{xx}(-c) \right)
 \end{aligned}$$

derivata da t nella 2^a variabile *2^a per 2^a per*

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\mathcal{R}} g(\xi) \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} [\varphi_t + c\varphi_x] (\xi - ct, t) dt d\xi = \\
 &= \int_{\mathcal{R}} g(\xi) \left\{ 0 - (\varphi_t + c\varphi_x)(\xi, 0) \right\} d\xi
 \end{aligned}$$

dal sept compatto *integrande t=0*

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_{\mathcal{R}} \int_0^{+\infty} g(x-ct) (\varphi_{tt} - c^2 \varphi_{xx}) (x,t) dt dx = \\
 &= \int_{\mathcal{R}} g(\xi) \int_0^{+\infty} (\varphi_{tt} - c^2 \varphi_{xx}) (\xi + ct, t) dt d\xi =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\mathcal{R}} g(\xi) \frac{d}{dt} [\varphi_t - c\varphi_x] (\xi + ct, t) dt d\xi = \\
 &= \int_{\mathcal{R}} g(\xi) \left[0 - (\varphi_t - c\varphi_x)(\xi, 0) \right] d\xi
 \end{aligned}$$

come sopra, e *che diventa come sopra*

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} (I_1 + I_2) &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}} g(\xi) (-\varphi_t - c\varphi_x - \varphi_t + c\varphi_x)(\xi, 0) d\xi = \\
 &= \int_{\mathcal{R}} g(\xi) (-\varphi_t(\xi, 0)) d\xi
 \end{aligned}$$

che annulla l'altro per \Rightarrow esse 0 domeno. \square

ERT DELLE ONDE N DIMENSIONE $n > 1$

Modello della membrana vibrante.

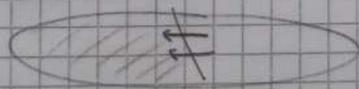
Sia $z = u(x, y, t)$ il probico z + z + z , della membrana. Si dimostra in modo simile al caso delle corde vibrante, che l'eqz e

$$u_{tt} - c^2 (u_{xx} + u_{yy}) = 0$$

ove c e' la
di $c^2 = v^2$

dove $c^2 = \frac{\tau}{\rho}$ con ρ la densita' superficiale della membrana e τ la tensione e v la velocita'

una corda si def
la tensione in una
membrana?



forza (per unita' di
lunghezza) tensione
e tensione unita' probico
parte di membrana

Dunque:

$$u_{tt} - c^2(\Delta u) = f(x,t)$$

dove $(x,y) \in \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ dominio di dominio la vibrazione /
 tamburo.

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = f \\ u(x,y,t) = 0 \\ u(x,y,0) = g(x) \\ u_t(x,y,0) = h(x) \end{cases}$$

$(x,y) \in \Omega, t > 0$
 $(x,y) \in \partial\Omega$

|| problema di Cauchy - Darboux

verificare
 ipotesi agli
 estremi

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = f \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x,y,t) = 0 \\ u(x,y,0) = g(x) \\ u_t(x,y,0) = h(x) \end{cases}$$

$(x,y) \in \Omega, t > 0$
 $(x,y) \in \partial\Omega$

|| problema di Cauchy - Neumann

Questo era in $\mathbb{R}^n=2$. In $\mathbb{R}^n=3$ si può pensare alle
 onde sonore in un gas (es. aria).

Se p è la densità del gas, p_0 la densità a riposo,
 si introduce la compressione

condensazione ρ : $p = p_0(1 + \rho)$

Si dimostra che si risolve

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$$

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$$

dove c è la velocità del suono, nel gas. In questo
 contesto la densità ρ è funzione di Cauchy.

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \\ u(x,y,z,t) = g(x,y,z) \\ u_t(x,y,z,t) = h(x,y,z) \end{cases} \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

o anche alle equazioni delle onde elettromagnetiche.
 Partendo dalle eq di Maxwell (nel vuoto e senza
 sorgenti)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 & \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\mathbf{E}_i)_{tt} - c^2 \Delta \mathbf{E}_i = 0 \\ (\mathbf{B}_i)_{tt} - c^2 \Delta \mathbf{B}_i = 0 \end{cases} \quad \forall i=1,2,3$$

Con c la velocità della luce nel vuoto.

Moltiplicando di nuovo per gradi di $\mathbb{C}D = \mathbb{C}N$ con n
 cilindro unitario

Alm due $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n$ dominio unitario, ma $T > 0$.
 nelle classi di Etema, detto $\mathcal{Q}_T = \mathbb{R} \times (0,T)$,

$\mathbb{C}^2(\mathcal{Q}_T) \cap \mathbb{C}^2(\bar{\mathcal{Q}}_T)$

la rete di un grado di $\mathbb{C}D = \mathbb{C}N$, dove

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = f(x,t) \\ u(x,t) = 0 \\ u(x,0) = g(x) \\ u_t(x,0) = h(x) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = 0 \\ \text{...} \end{cases}$$

se \exists , è vice.

Dim. Se u_1 è un caso due reti dello stesso problema
 o $\mathbb{C}D = \mathbb{C}N$ allora

$u = u_1 - u_2$ soddisfa

Vogliamo dimostrare che $u \equiv 0$ in Ω_T .

Un modo ancora di mettere dell'energia definiamo

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ (u_t)^2 + c^2 \|\nabla u\|^2 \right\} (x, t) dx$$

in realtà il fatto che sia 0 energia non è importante (che zero è una costante per motivi notazionali)

Calcoliamo $d/dt E(t)$.

$$\frac{d}{dt} E(t) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left\{ \cancel{u_t u_{tt}} + c^2 \sum_{i=1}^n u_{x_i} u_{x_i t} \right\} dx$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sum_i u_{x_i} u_{x_i t} = \sum_i \int_{\Omega} u_{x_i} u_{x_i t} dx = \text{per parti} \\ & = \sum_i \left\{ - \int_{\Omega} u_{x_i x_i} u_t dx + \int_{\partial \Omega} u_{x_i} u_t \nu_i d\sigma \right\} \\ & = \int_{\Omega} - \left(\sum u_{x_i x_i} \right) u_t dx + \int_{\partial \Omega} u_t \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} E(t) = \int_{\Omega} (u_t u_{tt} - c^2 u_t \Delta u) dx + c^2 \int_{\partial \Omega} u_t \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma$$

$$\int_{\partial \Omega} u_t(\sigma, t) \frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma, t) d\sigma$$

- se CN $\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ su $\partial \Omega$

- se CD $\Rightarrow u(\sigma, t) = 0 \forall t \Rightarrow u_t(\sigma, t) = 0$

$$\frac{d}{dt} E(t) = 0 \Rightarrow E(t) = \text{costante}$$

$$\Rightarrow E(t) = E(0) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_t^2 + c^2 \|\nabla u\|^2)(x, 0) dx$$

Trattando con le ci

$$u_t(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \Omega \Rightarrow \text{cioè } \nabla u = 0$$

$$\Rightarrow E(t) = E(0) = 0 \quad \forall t$$

Quindi $\Rightarrow u_t \equiv 0$ e $\nabla u \equiv 0$ in Ω_T

$\Rightarrow u$ è costante in Ω_T (ma se $u(x, 0) = 0$ e $u \in C^0(\bar{\Omega}_T)$)

$\Rightarrow u \equiv 0$ in $\Omega_T \Rightarrow u_1 = u_2 (!)$ \square

vale anche in

Es. nella classe di Ω_T $C^2(\Omega_T \times (0, +\infty))$, la rls di un pdc globale

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = f & | & x \in \Omega^n, \quad \text{se } f \text{ è una} \\ u(x, 0) = g(x) & | & \\ u_t(x, 0) = h(x) & | & \end{cases}$$

Consideriamo il problema di Cauchy-Dirichlet su un cilindro
 (autotro) caso omogeneo

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \\ u(x, t) = 0 \\ u(x, 0) = g(x) \\ u_t(x, 0) = h(x) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \in \Omega, t \in (0, T) \\ x \in \partial\Omega, t \in (0, T) \end{aligned}$$

Non t-ho ov! , cerchiamo una, usando il metodo
 di separazione delle variabili. Cerchiamo

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$$

$$\begin{aligned} x \in \Omega, t \in (0, T) \\ x \in \partial\Omega, t \in (0, T) \end{aligned}$$

separazione
spaziale e tempo

allora si separa diventa

$$X(x) T''(t) = c^2 \Delta X(x) T(t)$$

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{\Delta X}{X}$$

vera $\forall x \in \Omega, t > 0$
 \Rightarrow ogni due membri deve
 essere costante

Caso $\exists \lambda \in \mathbb{R}$: $\frac{\Delta X}{X} = \lambda = \frac{T''}{c^2 T} \Rightarrow \Delta X = \lambda X$
 $T'' = c^2 \lambda T$

prima equ. $X''(x)$

$$\begin{cases} \Delta X(x) = \lambda X(x) \\ X(x) = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} \forall x \in \Omega \\ \forall \xi \in \partial\Omega \end{aligned}$$

\exists equ. di Helmholtz

Come problema alle frontiere questo problema è
 autovalore per il Laplaciano su un cilindro
 cilindrico in \mathbb{R}^n .

Se $X \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ e $X \not\equiv 0$ sol. del problema
 sopra, diciamo che $X(x)$ è una autofunzione
 di Δ (con cui 0 al bordo), e λ è un autovalore

Supponiamo, anzi

LEM. Se λ è un autovalore per $(*)$, allora $\lambda \leq 0$.

Dim. Supponiamo $X(x)$ sia un autovalore di λ . Allora

$$\Delta X = \lambda X \quad (\cdot X \text{ per } \Omega)$$

$$\int_{\Omega} X(x) \Delta X(x) dx = \lambda \int_{\Omega} X(x)^2 dx$$

$$\begin{aligned} \text{div}(X \nabla X) &= X \cdot \Delta X + \|\nabla X\|^2 \\ &= \int_{\Omega} \text{div}(X \nabla X) - \int_{\Omega} \|\nabla X\|^2 dx \end{aligned}$$

come si deve fare
 e fare per qualcosa
 al t-ho della div

$$\int_{\partial\Omega} X \frac{\partial X}{\partial \nu} d\sigma = 0 \text{ perché } X=0 \text{ in } \partial\Omega$$

$$\Rightarrow - \int_{\Omega} \|\nabla X\|^2 dx = \lambda \int_{\Omega} X(x)^2 dx$$

$$\lambda = - \frac{\int_{\Omega} \|\nabla X\|^2 dx}{\int_{\Omega} X(x)^2 dx}$$

questo ≤ 0 , e solo se $\nabla X = 0 \Leftrightarrow X$ costante

questo ≤ 0 perché X non è $\equiv 0$
 e $X \in C^2$

ma X costante impossibile
 $X \equiv 0$ perché $\equiv 0$ sul bordo ma
 se $\nabla X = 0$

Segue da eq. 2
 per t-ho la forma

$$T'' = \lambda c^2 T$$

$\lambda = -\omega^2 < 0$

Dopo
com

ma

Caso

T

non
ris
nel
se

all

Dim

3
0
e

$\Rightarrow T''(t) = -\omega^2 T(t)$ che ha sol^o (EDO del 2° ordine)
 $T(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$ (quelle e etc)

Di conseguenza le sol^o e non ripetute per un valore nullo
 come

$$u(x,t) = X(x) \cdot (a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t))$$

con X autofunzione del Laplaceur

trovare la CD per ∂ eq^o del calore con condizioni limitate.

$$\begin{cases} u_t - D \Delta u = 0 \\ u(x,t) = 0 \\ u(x,0) = y(x) \end{cases} \quad \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ t \in \mathbb{R}, x > 0 \end{array}$$

Cercare $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ separare

$$X \cdot T' = D \Delta X \cdot T$$

$$\frac{T'}{DT} = \frac{\Delta X}{X} = \lambda \quad \text{che da ancora due} \\ \text{retrovalabili}$$

$$T' = \lambda D T(t) \\ -\omega^2 = 0$$

$$\begin{cases} \Delta X = \lambda X \\ X = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \mathbb{R} \\ \partial \mathbb{R} \end{array}$$

quale che abbiano un'autofunzione
 se $\lambda > 0$ allora $\lambda = 0$

$$\Rightarrow u(x,t) = e^{\lambda D t} \cdot X(x) \quad \text{autofunz del } \Delta \\ \text{exp decrescenti}$$

Consideriamo che, date $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n$ dom u e \mathbb{R}^n , e
 stesso u, v regolari: $u, v \in C^2(\mathbb{R}) \cap C^1(\partial \mathbb{R})$ autofunzioni
 relative a autovalori costanti, cioè

$$S_1 \begin{cases} \Delta u = \lambda u \\ u = 0 \end{cases} \quad S_2 \begin{cases} \Delta v = \mu v \\ v = 0 \end{cases} \quad (\lambda \neq \mu)$$

Allora $\int_{\mathbb{R}} uv \, dx = 0$, cioè autofunz con autovalori
diversi sono ortogonali
 in $L^2(\mathbb{R})$

Dim. $S_1 \cdot v$ e $S_2 \cdot u$ da' (razionando):

$$\int_{\mathbb{R}} (v \Delta u - u \Delta v) \, dx = (\lambda - \mu) \int_{\mathbb{R}} uv \, dx$$

dalla 2° IDG

$$\int_{\partial \mathbb{R}} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) \, d\sigma = (\lambda - \mu) \int_{\mathbb{R}} uv \, dx$$

$\neq 0$ per l'ip

$$\Rightarrow 0 = \int_{\mathbb{R}} uv \, dx \quad \square$$

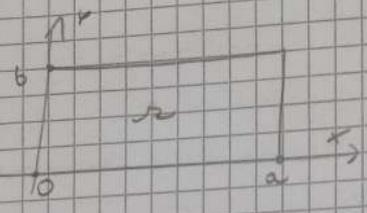
Si può dimostrare che

Thm. In \mathbb{R} esiste u in $C^2(\mathbb{R}) \cap C^1(\partial \mathbb{R})$, per il problema
 agli autovalori

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda u \\ u = 0 \end{cases} \quad \text{esistono} \\ \text{(1) una sola } \lambda > 0 \\ \text{(2) autovalori: } \lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \dots \\ \lambda_n \rightarrow -\infty$$

(2) \exists una succ $\} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ di autovalori corrispondenti
 che costituiscono un SONC di $L^2(\Omega)$
 sistema ortonormale completo

Problema agli autovalori per il laplaciano nel rettangolo.



$(x,y) \in \Omega = [0,a] \times [0,b]$

Autovalore

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = \lambda u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad \left(\begin{cases} \lambda_n = -\lambda_n \\ \mu = 0 \end{cases} \right)$$

vista il dato, cerchiamo sol+ con separazione di var:

$u(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$
 $\Rightarrow X''Y + XY'' = \lambda XY \quad (/XY)$

$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = \lambda$

$\frac{X''}{X} = \lambda - \frac{Y''}{Y} = \mu$ entrambi costanti

$\begin{cases} X''(x) = \mu X(x) \\ X(0) = X(a) = 0 \end{cases} \quad | \quad x \in (0,a)$

$\mu \neq 0$ 2^a ordine ecc)
 relativo prob,
 ha sol+.

$X_n(x) = \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{a} \right) \quad n = 1, 2, \dots$

$\mu_n = -\frac{n^2\pi^2}{a^2}$

$\frac{Y''}{Y} = \lambda - \mu = \gamma$, non sappiamo ne' λ ne' μ
 \Rightarrow prendiamo $\lambda - \mu = \sigma$

$\begin{cases} Y'' = \gamma Y \\ Y(0) = Y(b) = 0 \end{cases} \quad | \quad Y \in (0,b)$

che ora e' come prima

$Y_m(y) = \text{sen} \left(\frac{m\pi y}{b} \right)$

$\sigma_m = -\frac{m^2\pi^2}{b^2}$

dal legame $\lambda - \mu = \sigma$ e avendo trascurato μ

una possibile trascurare λ , gli autovalori:

$$\lambda_{n,m} = -\pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) \quad n,m = 1, 2, \dots$$

Le corrispondenti autovalori saranno

$$u_{n,m}(x,y) = \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{m\pi y}{b} \right)$$

mentre relative normalizzate

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = \lambda u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \\ u(x,y,0) = f(x,y) \\ u_t(x,y,0) = g(x,y) \end{cases} \quad \Omega = (0,a) \times (0,b)$$

quello dell'altra volta di λ e' ovviamente intenzioni a risolvere

Le sol+ a var separate sono

$u(x,y) = U(x,y) \cdot T(t)$ dove

per quello li ho scritto come $\lambda = -\lambda$ e $\mu = 0$

U erano le condizioni del 1
T restrizioni

$$T'' = c^2 \Delta T = -\pi^2 c^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) T = -\omega_{m,n}^2 T$$

$$\Rightarrow T(t) = a_{m,n} \cos(\omega_{m,n} t) + b_{m,n} \sin(\omega_{m,n} t) \quad \omega_{m,n} = \pi c \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$$

Costruiamo una serie del problema di CD del tipo

$$u(x,y,t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \left\{ a_{m,n} \cos(\omega_{m,n} t) + b_{m,n} \sin(\omega_{m,n} t) \right\} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

Considerata la serie infinita. Troviamo le ca:

• $u(x,y,0) = f(x,y)$

$$f(x,y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{m,n} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$a_{m,n} = \frac{2}{a} \cdot \frac{2}{b} \int_0^a \int_0^b f(x,y) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy$$

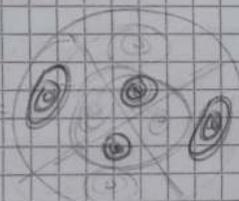
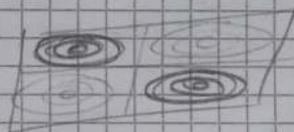
• $u_t(x,y,0) = h(x,y)$

$$h(x,y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} b_{m,n} \omega_{m,n} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$b_{m,n} = \frac{2}{a} \cdot \frac{2}{b} \frac{1}{\omega_{m,n}} \int_0^a \int_0^b h(x,y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy$$

* Dopo estensione della serie a una vibrazione stazionaria, come con le onde dello snello.

Ci sono onde per le quali le linee nodali, quelle tra le corde.



Nonando alle frequenze:

$$\omega_{m,n} = c\pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_{m,n}} \quad f = \nu = \frac{\omega_{m,n}}{2\pi} = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$$

$$v_{s,1} = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$$

Ma una Dnm non è in generale un intero intero della legge $v_{s,1}$.

Una ob estensione della serie non si chiamano armoniche ma parziali.

Maestro per cui non restano "note" di Fourier, quelli non danno (la serie degli estensibili) vibrazioni prodotte → non ricevono una nota.

Capo dell' essere soliti in \mathbb{R}^2 da \mathbb{R} .

Problema di CD per l' eqz del calore sul rettangolo.

$$\begin{cases} u_t - D(u_{xx} + u_{yy}) = 0 \\ u = 0 \\ u(x,y,0) = g(x,y) \end{cases} \quad \begin{cases} \Omega = (0,a) \times (0,b) \\ \partial\Omega \end{cases}$$

Le solt e var separate sont

$$u(x,y,t) = U_{n,m}(x,y) \cdot T_{n,m}(t), \text{ dove } T_{n,m} \text{ soddisfa}$$

$$T'_{n,m} = \lambda T_{n,m}, \quad \lambda_{n,m} = -\omega_{n,m}^2$$

$$\Rightarrow T_{n,m}(t) = e^{-\omega_{n,m}^2 t}$$

Quindi abbiamo solt del pdc del tipo serie:

$$u(x,y,t) = \sum_{n,m=1}^{+\infty} e^{-\omega_{n,m}^2 t} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \cdot c_{n,m}$$

dalle cui impoiamo

$$f(x,y) = \sum_{n,m=1}^{+\infty} c_{n,m} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$$

$$c_{n,m} = \frac{2}{a} \frac{2}{b} \int_0^a \int_0^b f(x,y) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dx dy$$

$$n, m = 1, 2, \dots$$

$$\omega_{n,m}^2 = \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)$$

Stabilita le Σ converge molto bene grazie alle imp, per u esse C^∞ , come al solito nel caso.

Ma se: rapporto molto cd su caso / anche nelle generale per ω rapporto molto quelli est con le esclusioni.

Problema di Cauchy globale per l'est della ante.

$$(A) \begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 & | \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

La impoiamo in \mathbb{R}^n globale, ma per problemi. Calcoliamo le solt fondamentali (1 distribuzione).

Prop. Supponiamo che u risolva il problema

$$(1) \begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 & | \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = h \end{cases} \quad \text{e supponiamo } u \in C^3. \text{ allora}$$

$$w = \frac{\partial u}{\partial t} \text{ risolva}$$

$$(2) \begin{cases} w_{tt} - c^2 \Delta w = 0 \\ w(x, 0) = h \\ w_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

e quindi per il teorema di unicità si ha $w = \frac{\partial u}{\partial t}$ e per il teorema di unicità si ha $u = \int_0^t w(x, \tau) d\tau$

Dim. Per l'ip $u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$, ma se $u \in C^3$ allora

$$u_{tt} - c^2 \Delta u \in C^1 \text{ e } \frac{\partial}{\partial t} (u_{tt} - c^2 \Delta u) = 0 \text{ anche.}$$

$$\text{Con } w = u_t$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (w_t - c^2 \Delta w) = w_{tt} - c^2 \Delta \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) = 0$$

$$\cdot w(x, 0) = u_t(x, 0) = h \Rightarrow w \text{ e' solt dell' est}$$

$$\cdot w_t(x, 0) = u_{tt}(x, 0) = c^2 \Delta u(x, 0) \text{ che e' } = 0 \text{ perché } u(x, 0) = 0 \Rightarrow u_{xx}(x, 0) = 0 \quad \square$$

Per mostrare allora il prob (1) intrinsecamente il concetto di solt fondamentale

Def. Diciamo che $\Gamma(x,t)$ e' una solt fondamentale per l'operatore delle onde in \mathbb{R}^n se

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_{tt} - c^2 \Delta \Pi = 0 \\ \Pi(x, 0) = 0 \\ \Pi_t(x, 0) = f_0(x) \end{array} \right. \quad \left| \quad \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \right.$$

in $D'(\mathbb{R}^n)$

Analoga: il ruolo del valore $h(x, t)$ rinvolve

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{tt} - \Delta h = 0 \\ h(x, 0) = f_0(x) \end{array} \right. \quad \left| \quad \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \right.$$

Andrà ad essere uguale a f_0 se non fosse quella
 di ordine superiore.

È come avere utile quanto Π ?

Se conoscessimo una $\Pi(x, t)$, rinvolve perché

- Per (1), se possiamo

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Pi(x-y, t) l(y) dy$$

allora u rinvolve
 il problema (2): $\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = h \end{array} \right.$

Insomma: per $t > 0$ calcoliamo l'andamento

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta_x \right) \int_{\mathbb{R}^n} \Pi(x-y, t) l(y) dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{(\Pi_{tt} - c^2 \Delta \Pi)}_{=0 \text{ per def di } \Pi} (x-y, t) l(y) dy = 0$$

$$u(x, 0) = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\Pi(x-y, 0)}_{=0} l(y) dy = 0$$

$$u_t(x, 0) = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\Pi_t(x-y, 0)}_{f_0(x-y)} l(y) dy = h(x) \quad \Rightarrow y=x$$

$l(y)$ calcolata dove $x-y=0$

- Per rinvolve (2) $\left\{ \begin{array}{l} w_{tt} - c^2 \Delta w = 0 \\ w(x, 0) = p(x) \\ w_t(x, 0) = 0 \end{array} \right.$ rinvolve la traslazione
 di w

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Pi(x-y, t) p(y) dy$$

$$w = u_t(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Pi_t(x-y, t) p(y) dy$$

Andrà se conosco la rls fondamentale Π , lo considero
 rls su un gdc scelto con p e h e' (come (1))

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Pi_t(x-y, t) p(y) dy + \int_{\mathbb{R}^n} \Pi(x-y, t) l(y) dy$$

È con Duhamel si rinvolve invece alle rls del
 mal non superero.

Maiale: o rinvolve lo Π .

Trasliamo come la rls fondamentale. Casi sono con-
 siderando il caso $\mathbb{R}^n = 1$.

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = h \end{array} \right. \quad \left| \quad \mathbb{R} \times (0, +\infty) \right.$$

Le formule rinvolve su \mathbb{R} era quella di D'Alembert

$$u(x,t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} l(y) dy$$

non vanno confrontate con quella sinistra delle teoremi generale

$$= \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x-y, t) l(y) dy$$

$$\Rightarrow \Gamma(x-y, t) = \frac{1}{2c} \frac{1}{(x-ct, x+ct)}(y) =$$

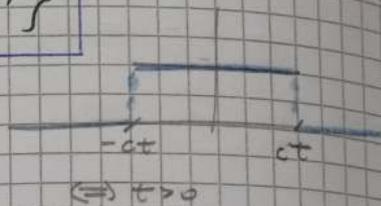
$$= \frac{1}{2c} \frac{1}{(-ct, ct)}(x-y)$$

$\begin{cases} x-ct < y < x+ct \\ x-y < ct, x-y > -ct \end{cases}$

$$\Gamma(z, t) = \frac{1}{2c} \frac{1}{(-ct, ct)}(z) =$$

$$= \frac{1}{2c} \left\{ H(z+ct) + H(z-ct) \right\}$$

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



Calcoliamo ora, una rela condensatore in \mathbb{R}^3 .

Deve soddisfare

$$\begin{cases} \Gamma_{tt} - c^2 \Delta \Gamma = 0 \\ \Gamma(x, 0) = 0 \\ \Gamma_t(x, 0) = \delta_0(x) \end{cases} \quad \mathbb{R}^3 \times (0, +\infty)$$

(D è spherico, δ_0 è un punto, quindi) Calcoliamo cercando una rela in forma radiale, ma in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \times (0, +\infty)$ allora.

Calcoliamo così la $u(r,t) = U(r,t)$ rela delle role eqz differenziale. Poi troveremo il grad.

Per una rela radiale esse allora

$$U_{tt} - c^2 \left\{ U_{pp} + \frac{n-1}{p} U_p \right\} = 0, \quad \text{e noi interessa } n=3, \text{ quindi}$$

$$U_{tt} - c^2 \left\{ U_{pp} + \frac{2}{p} U_p \right\} = 0 \quad (1)$$

che si risolve facilmente prendendo $w = pU$.

$$\Rightarrow w = pU$$

$$w_{tt} = p U_{tt}$$

$$w_p = U + p U_p$$

$$w_{pp} = U_p + U_p + p U_{pp} = 2U_p + p U_{pp}$$

$$\Rightarrow w_{tt} - c^2 w_{pp} = p U_{tt} - c^2 (2U_p + p U_{pp})$$

$$\frac{w_{tt} - c^2 w_{pp}}{p} = U_{tt} - c^2 \left(U_{pp} + \frac{2}{p} U_p \right) = 0$$

$$U(p,t) \text{ soddisfa (1)} \Leftrightarrow w_{tt} - c^2 w_{pp} = 0$$

Qua la rela $w(p,t)$ non ha nessuna condizione e solle le

$$w(p,t) = f(p+ct) + g(p-ct), \quad \text{per } f, g \in C^2(\mathbb{R})$$

e $U = w/p$ quindi

$$U(p,t) = \frac{f(p+ct) + g(p-ct)}{p}$$

richiamo $w_{tt} - c^2 w_{pp} = 0$
 $\Rightarrow p, p^2$ cancello

e arriva un'eqz delle onde (in R)

l'equazione dell'eqz delle onde

Se u è soluzione dell'eqt delle onde su \mathbb{R}^3 reale, le onde reali, allora non tutte le eqt del tipo

$$u(x,t) = \left[f(|x|+ct) + g(|x|-ct) \right] \cdot \frac{1}{|x|}$$

per $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ e $x(0,+\infty)$.

Calcoliamo la rlx condizionale, cioè calcoliamo f, g in modo da valutare la eq:

(a) $u(x,0) = 0$
 (b) $u_t(x,0) = \delta_0(x)$ in $D'(\mathbb{R}^3)$
 (c) $0 = f(\rho) + g(\rho) \Rightarrow f(\rho) = -g(\rho)$

$$\Rightarrow u(\rho, t) = \frac{f(\rho+ct) - f(\rho-ct)}{\rho}$$

(b) $u_t(\rho, t) = \frac{c f'(\rho+ct) + c f'(\rho-ct)}{\rho}$

$u_t(\rho, 0) = 2c \frac{f'(\rho)}{\rho}$, vogliamo che sia

$$2c \frac{f'(\rho)}{\rho} = \delta_0(x) \text{ in } D'(\mathbb{R}^3)$$

Cioè calcoliamo f (da ρ o direttamente) in modo che $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ sia

$$\varphi(0) = \langle \varphi, \delta_0 \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \left(2c \frac{f'(|x|)}{|x|} \right) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi$$

Se vole $\forall \varphi$ vale anche per φ test reale, $\varphi = \varphi(|x|)$ allora deve risultare

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \int_{\mathbb{R}^3} 2c \frac{f'(|x|)}{|x|} \cdot \varphi(|x|) dx = \left\{ \int_{\text{volume}} \right\} \\ &= 4\pi \int_0^{+\infty} 2c \frac{f'(\rho)}{\rho} \varphi(\rho) \rho^2 d\rho \end{aligned}$$

Calcoliamo f tale che $\forall \varphi$ test o abbia

$$\varphi(0) = 8\pi c \int_0^{+\infty} f'(\rho) \cdot \rho \cdot \varphi(\rho) d\rho$$

Simmetrizziamo f e φ e tutto \mathbb{R} in modo pari

$$\int_0^{+\infty} f'(\rho) d\rho = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}'(\rho) d\rho$$

- f pari su $\mathbb{R} \Rightarrow f'$ dispari

$$\varphi(0) = 4\pi c \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}'(\rho) \rho \varphi(\rho) d\rho$$

$\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}), \varphi$ pari

invece grazie al eqt compatto della φ

Se φ è dispari l'1 è nulla, ma se φ è dispari $\varphi(0) = 0$ quindi nella relazione è costante vera.

Quindi cerchiamo f tale che

$$4\pi c \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}'(x) \cdot x = \delta_0(x)$$

$$4\pi c \left(-\frac{\tilde{f}'(x)}{4\pi c} \right) x = -\delta$$

abbiamo risolto l'eq per il problema.

osservando che $x \delta'(x) = -\delta$

equivalente a spiegare la derivata di f e se la δ

$$\langle x\delta', \varphi \rangle = \langle \delta', \varphi x \rangle = - \langle \delta', \varphi + x\varphi' \rangle = -\varphi(0) + 0 = -\varphi(0) = \langle -\delta, \varphi \rangle$$

$$\Rightarrow x\delta' = -\delta \quad \square$$

allora $f(x) = \frac{-\delta(x)}{4\pi c}$

$$u(x,t) = \frac{f(x+ct) - f(x-ct)}{c}$$

$$u(x,t) = -\frac{1}{4\pi c|x|} \left(\delta_0(|x|+ct) - \delta_0(|x|-ct) \right)$$

sempre $= 0$ perché $|x| > 0$ e $t > 0$

$$\Rightarrow \boxed{r(x,t) = \frac{\delta_0(|x|-ct)}{4\pi c|x|}} \quad (|x| > 0, t > 0) \quad \left(\begin{array}{l} \delta_0(|x|-ct) \\ \Leftrightarrow \delta_{ct} \end{array} \right)$$

La condizione dell'eq. sulle onde in \mathbb{R}^3

$$r(x,t) = \frac{\delta_0(|x|-ct)}{4\pi c|x|}$$

Una ricerca per un nostro p.d.c. allora visto che la Π dovrebbe essere la formula di rappresentazione delle onde in un p.d.c.

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \\ u(x,0) = \varphi \\ u_t(x,0) = \psi \end{cases}$$

$\mathbb{R}^3, t > 0$

a sinistra rappresento f, c^2 e h, c^2 per un c^2 , ma non

la soluzione fisica e lo trasformo come il d'Alambert

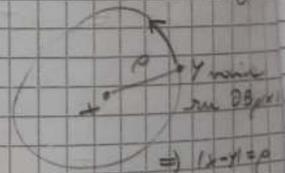
$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^3} r(x-y,t) h(y) dy + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial r}{\partial t}(x-y,t) g(y) dy$$

$$\cdot \int_{\mathbb{R}^3} r(x-y,t) h(y) dy = \left\{ r(x,t) \text{ quella sfera} \right\} =$$

$$= \int_0^{+0} \int_{\partial B_p(x)} \frac{\delta_0(|x-y|-ct) h}{4\pi c|x-y|} d\sigma(y) dp =$$

$$= \int_0^{+0} \int_{\partial B_p(x)} \frac{\delta_0(p-ct) h}{4\pi c p} \quad \text{risolvo al } p=ct$$

$$= \int_{\partial B_{ct}(x)} \frac{1}{4\pi c^2 t} h(y) d\sigma(y)$$



ando la condizione limite di rappresentazione e

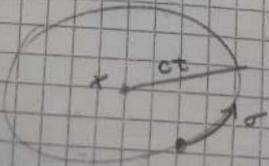
$$u(x,t) = \int_{\partial B_{ct}(x)} \frac{1}{4\pi c^2 t} h(y) d\sigma + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\partial B_{ct}(x)} \frac{1}{4\pi c^2 t} g(y) d\sigma$$

che è detta formula di Kirchhoff.

Candidata \Rightarrow dovremo osservare per quel c, φ l'ordine

si debba riferire sia r , che g + c + componenti nel dominio di integrazione \Rightarrow lo osserviamo.

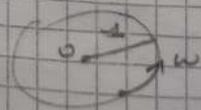
Per capire come si possono calcolare le derivate di u e di rappresentazione di h, g e r che si vuole perché questa è la nostra, l'abbiamo che \int su superficie:



$\sigma \in \partial B_{ct}(x)$

$$\sigma = x + ct w$$

$$d\sigma = (ct)^2 dw$$



$w \in \partial B_{ct}(0)$

$$\Rightarrow \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B_{ct}(x)} h(\sigma) d\sigma = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B_{ct}(0)} h(x+ctw) (c^2 t^2 dw) =$$

$$= \frac{t}{4\pi} \int_{\partial B_{ct}(0)} h(x+ctw) dw$$

che ora è più facile da dimostrare su x e t . E dovremo allora chiedere $h \in C^2(\mathbb{R}^3)$. E allo stesso modo era

$$u(x,t) = \frac{t}{4\pi} \int_{\partial B_{ct}(0)} h(x+ctw) dw + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{t}{4\pi} \int_{\partial B_{ct}(0)} g(x+ctw) dw \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B_{ct}(0)} g(x+ctw) dw + \frac{tc}{4\pi} \int_{\partial B_{ct}(0)} \underbrace{\frac{\partial}{\partial w} g(x+ctw)}_{\text{derivata}} \cdot \underbrace{dw}_{\text{incambiata}} =$$

allora non chiedere
 $g \in C^2$ cioè $g \in C^3(\mathbb{R}^3)$,
 per avere $u \in C^2$.

Lemma (Lemma di Duhamel): Sia $g \in C^3(\mathbb{R}^3)$ o $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$, allora è una relazione $C^2(\mathbb{R}^3 \times (0, +\infty))$ del pdc

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \\ u(x,0) = g(x) \\ u_t(x,0) = h(x) \end{cases} \quad \mathbb{R}^3, t > 0$$

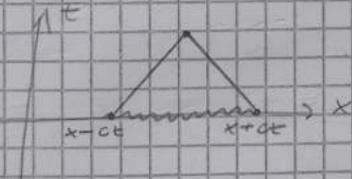
e la $u(x,t)$ è costruita dallo Lemma di Duhamel.

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B_{ct}(x)} h(\sigma) d\sigma + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B_{ct}(x)} g(\sigma) d\sigma \right]$$

In dimensione 3 la relazione dell'eqz delle onde può essere non regolare delle cui \Rightarrow una relazione di regolarità.
 Richiede qualcosa addirittura

l'assunzione regolare che in dimensione 1.

Inoltre, ricordando al derivare di dipendere delle relt, in dimensione 4 otteniamo invece questo: mentre



In \mathbb{R}^3 , la $u(x,t)$ dipende da valori di g e h nei punti della superficie $\parallel \partial B_{ct}(x)$

Caso no pto $y: |x-y| = ct$.

Se all'istante iniziale c'è un segnale nel punto y , questo si propagherà nel pto x solo all'istante $t = \frac{|x-y|}{c}$, e non più

\Rightarrow vale per l'eqz delle onde in \mathbb{R}^3 il principio di Huygens forte:

una superficie ipersuperficiale può propagare segnale di data istante

(per questo non c'è eco nella voce, perché le onde non non in \mathbb{R}^3) e' una costante propria di \mathbb{R}^3 .

Conferma e primo attento sulle onde regole.

re $u(x,t) = U(x,t)$ e relt di $u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$ in

\mathbb{R}^3 e $t > 0$, allora la funzione $w = p U(p, t)$ soddisfa
 l'eq della corda vibrante $w_{tt} - c^2 w_{pp} = 0$

Consideriamo un gdc con cui radioli:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{tt} - c^2 w_{pp} = 0 \\ w(x, t) = p(x) \\ w_t(x, 0) = l(x) \end{array} \right. \quad \left| \quad \begin{array}{l} \mathbb{R}^3, t > 0 \\ \text{dove} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} p(x) = G(|x|) \\ l(x) = H(|x|) \end{array}$$

allora $w(p, t) = p \cdot U(p, t)$ soddisfa

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{tt} - c^2 w_{pp} = 0 \\ w(p, 0) = p \cdot U(p, 0) = p \cdot G(p) \\ w_t(p, 0) = p \cdot U_t(p, 0) = p \cdot H(p) \end{array} \right.$$

che è un gdc che rappresenta i nodi della corda
 o di alambicco:

$$w(p, t) = \frac{(p+ct) \cdot G(p+ct) + (p-ct) \cdot G(p-ct)}{2} + \\ + \frac{1}{2c} \int_{p-ct}^{p+ct} \gamma H(\gamma) d\gamma$$

$$U(p, t) = \frac{w(p, t)}{p}, \quad u(x, t) = U(|x|, t)$$

$$u(x, t) = \frac{w(|x|, t)}{|x|}$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \frac{(|x|+ct) G(|x|+ct) + (|x|-ct) \cdot G(|x|-ct)}{2|x|} + \\ + \frac{1}{2c|x|} \int_{|x|-ct}^{|x|+ct} \gamma H(\gamma) d\gamma$$

che è la formula involutiva per un gdc con cui
 radioli.
 Che è molto semplice e compatta.

Problema di Cauchy globale in \mathbb{R}^2 Metodo della
 discesa di Aleksandrov p.340

Sei $u(x_1, x_2, t)$ solz del gdc

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - c^2 (u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2}) = 0 \\ u(x_1, x_2, 0) = p(x_1, x_2) \\ u_t(x_1, x_2, 0) = l(x_1, x_2) \end{array} \right. \quad \left| \quad \mathbb{R}^2, t > 0 \right.$$

La in gdc non è possibile vederla come una gdc di
 x_1, x_2, x_3, t ma \perp da x_3 . Dunque allora viene
 comparsa

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - c^2 (u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + u_{x_3 x_3}) = 0 \\ u(x, 0) = p(x_1, x_2) \\ u_t(x, 0) = l(x_1, x_2) \end{array} \right. \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{Dunque se non} \\ \text{dipende da } x_3 \text{ allora} \\ \partial_{x_3} u = 0 \end{array} \right.$$

Allora la solz u è data da l'ichell:

$$u(x, t) = u(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B_{ct}(x_1, x_2, x_3)} l(\sigma) d\sigma + \\ + \frac{2}{c t} \left[\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B_{ct}(x_1, x_2, x_3)} p(\sigma) d\sigma \right]$$

che si può vedere dimensionalmente come \int l'area questa parte:

$$\int \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B_{ct}(x_1, x_2, x_3)} l(\sigma, \sigma) d\sigma = I$$

la sfera
ha equ: $(x_1 - \sigma_1)^2 + (x_2 - \sigma_2)^2 + (x_3 - \sigma_3)^2 = c^2 t^2$
 $(\sigma_3 - x_3)^2 = c^2 t^2 - r^2$

allora $f(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_3 = x_3 \pm \sqrt{c^2 t^2 - r^2}$

$I = \int_{\Sigma^+} \rho(\sigma_1, \sigma_2) d\sigma = \int_{(x_1 - \sigma_1)^2 + (x_2 - \sigma_2)^2 = c^2 t^2} \rho(\sigma_1, \sigma_2) \cdot \frac{ct}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} d\sigma_1 d\sigma_2$

se $\vec{r} = f(x, y)$ allora $dS = \sqrt{1 + \|f'\|^2} dx dy$
 $\frac{\partial f}{\partial x} = \pm \frac{(-2)(\sigma_1 - x_1)}{2\sqrt{c^2 t^2 - r^2}}$
 $\Rightarrow \|f'\|^2 = \frac{(\sigma_1 - x_1)^2 + (\sigma_2 - x_2)^2}{c^2 t^2 - r^2} = \frac{r^2}{c^2 t^2 - r^2}$

allora $d\sigma = \sqrt{1 + \frac{r^2}{c^2 t^2 - r^2}} d\sigma_1 d\sigma_2 = \frac{ct}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} d\sigma_1 d\sigma_2$

Con il altro integrale

$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{4\pi c t} ct \int_{(x_1 - \sigma_1)^2 + (x_2 - \sigma_2)^2 = c^2 t^2} \frac{\rho(\sigma_1, \sigma_2)}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} d\sigma_1 d\sigma_2 + \frac{\partial}{\partial t} [\dots]$

$= \frac{1}{4\pi c} \int_{|x-y| \leq ct} \frac{\rho(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |x-y|^2}} dy + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi c} \int_{|x-y| \leq ct} \frac{\dot{\rho}(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |x-y|^2}} dy \right)$

che è la formula di Poisson per la retta del piano globale in \mathbb{R}^2 .

Dov'è la dipendenza delle retta: $u(x, t)$ dipende dai valori di ρ che ne giurati

$|y - x| \leq ct$

Quindi non più è una distorsione recca ma in tutto in cerchio. In particolare, in generale, se $t \rightarrow 0$ si concentra in $y = x$ esattamente nel punto x in tutto che intendi

$|t| \geq \frac{|x-y|}{c}$ questo non vale glutinoso - esteso

è quello che succede l'oscillazione in senso nelle asse \Rightarrow tempo di onde, segnali non concentrati nel tempo

Se $\frac{1}{4\pi c} \int_{|x-y| \leq ct} \frac{\rho(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |x-y|^2}} dy$ lo pensano come $\int_{\mathbb{R}^2} P(x-y, t) \rho(y) dy$ trasforma la retta bidimensionale in \mathbb{R}^2 .

$P(x-y, t) := \frac{1}{4\pi c} \frac{1}{\sqrt{c^2 t^2 - |x-y|^2}}$

$$r(x,t) = \frac{1}{2\pi c} \frac{1}{\sqrt{c^2 t^2 - |x|^2}} \quad \text{|| } b_{ct}(0) \text{ (x)}$$

11.
C

che è una vera e propria onda in \mathbb{R}^3 come in $D(\mathbb{R}^n)$

è, non lo noto bene

2. (E1) Risolvere il pdc per l'eqt delle onde in \mathbb{R}^3

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = e^{-|x|^2} \end{cases} \quad \mathbb{R}^3, t > 0$$

con cui $f(x)$ è l'unica scelta, la scelta

$$u(x,t) = \frac{(|x|+ct) f(|x|+ct) + (|x|-ct) \cdot f(|x|-ct)}{2|x|} + \frac{1}{2c|x|} \int_{|x|-ct}^{|x|+ct} \gamma \cdot h(\gamma) d\gamma$$

nel nostro caso $\rho \equiv 0$, $h = e^{-\rho^2}$ quindi

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2c|x|} \int_{|x|-ct}^{|x|+ct} \gamma e^{-\gamma^2} d\gamma = \\ &= \frac{1}{2c|x|} \left(-\frac{1}{2} e^{-\gamma^2} \Big|_{|x|-ct}^{|x|+ct} \right) = \\ &= \frac{1}{4c|x|} \left(e^{-(|x|-ct)^2} - e^{-(|x|+ct)^2} \right) \end{aligned}$$

$$(E2) \begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \\ u(x,0) = 1+|x| \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases} \quad \mathbb{R}^3, t > 0$$

è non è C^3 , ma allora anche per questo in realtà è ok. Tentare l'onda c^0 scelta nuova scelta

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{(|x|+ct)(1+|x|+ct) + (|x|-ct)(1+||x|-ct|)}{2|x|} = \\ &= \frac{1}{2|x|} \left[2|x| + (|x|+ct)^2 + (|x|-ct)(||x|-ct|) \right] = \\ &\begin{cases} \text{re } |x| > ct: & 1 + \frac{2|x|^2 + 2c^2 t^2}{2|x|} = \\ &= 1 + \frac{|x|^2 + c^2 t^2}{|x|} \\ \text{re } |x| < ct: & 1 + \frac{4|x|ct}{2|x|} = 1 + 2ct \end{cases} \end{aligned}$$

(E3) Verificare che la scelta è corretta. Risolvere

$$\begin{cases} u_{tt} - (u_{xx} + u_{yy}) = 0 \\ u = 0 \\ u(x,y,0) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) \\ u_t(x,y,0) = 0 \end{cases} \quad (x,y) \in \mathcal{R} = (0,2) \times (0,1), t > 0$$

$$c^2 = 1, a = 2, b = 1$$

La rta è

$$u(x,y,t) = \sum_{m,n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{1}\right) \left\{ a_{m,n} \cos(\omega_{m,n} t) + b_{m,n} \sin(\omega_{m,n} t) \right\}$$

(dove $\omega_{m,n} = \pi c \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} = \pi \sqrt{\frac{m^2}{4} + n^2}$)

$b \equiv 0 \Rightarrow$
 $u(x,y,0) =$
 $\cos^3(\pi x)$

$\Rightarrow f(x)$

$\Rightarrow u(x)$

che in
non
(E6) h
netto

$$\begin{cases} u_t \\ u \\ u_t \end{cases}$$

La con
 $u(x,y,t)$

$u(x)$
 \Rightarrow

$\Rightarrow u$

Esatti

(E1)

Knolle

$h=0 \Rightarrow b_{nm}=0$

$u(x,y,0) = f(x,y)$, che è già nella forma onde stazionarie

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}^3(\pi y) &= \operatorname{Re}^2(\pi y) \operatorname{Re}(\pi y) = \left(\frac{1 - \cos(2\pi y)}{2} \right) \operatorname{Re}(\pi y) = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\pi y) - \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\pi y) \cos(2\pi y) = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\pi y) - \frac{1}{4} (\operatorname{Re}(3\pi y) - \operatorname{Re}(\pi y)) = \\ &= \frac{3}{4} \operatorname{Re}(\pi y) - \frac{1}{4} \operatorname{Re}(3\pi y) \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(x,y) = \operatorname{Re}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \left[\frac{3}{4} \operatorname{Re}(\pi y) - \frac{1}{4} \operatorname{Re}(3\pi y) \right]$

$\Rightarrow u(x,y,t) = \frac{3}{4} \operatorname{Re}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \operatorname{Re}(\pi y) \cos\left(\frac{\sqrt{5}}{2} \pi t\right) +$
 $-\frac{1}{4} \operatorname{Re}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \operatorname{Re}(3\pi y) \cos\left(\sqrt{\frac{1}{4}+0} \pi t\right)$

che in effetti non è presente nel tensor di Cayley non sono multiple.

(56) risolvere il problema per il caso del calore sul rettangolo.

$$\begin{cases} u_x - (u_{xx} + u_{yy}) = 0 \\ u = 0 \\ u(x,y,0) = 1 \end{cases} \quad \Omega = (0,1) \times (0,1), t > 0$$

La formula si scrive così

$$u(x,y,t) = \sum_{n,m=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{Re}(n\pi x)}{1} \frac{\operatorname{Re}(m\pi y)}{1} \left\{ b_{nm} e^{-(n^2+m^2)\pi^2 t} \right\}$$

$u(x,y,0) = 1$

$\Rightarrow 1 = \sum_{n,m=1}^{+\infty} b_{nm} e^{-(n^2+m^2)\pi^2 t}$

$b_{nm} = \frac{2}{1} \frac{2}{1} \int_0^1 \int_0^1 \operatorname{Re}(n\pi x) \operatorname{Re}(m\pi y) \cdot 1 \, dx \, dy =$

$= 4 \left[-\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} \Big|_0^1 \right] \left[\frac{\cos(m\pi y)}{m\pi} \Big|_0^1 \right] =$

$= \frac{4}{\pi^2 n m} (1 - \cos n\pi) (1 - \cos m\pi)$

$\Rightarrow u(x,y,t) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n,m=1}^{+\infty} \frac{(1 - \cos n\pi)(1 - \cos m\pi)}{nm} e^{-(n^2+m^2)\pi^2 t} \cdot \operatorname{Re}(n\pi x) \cdot \operatorname{Re}(m\pi y)$

Esercizi risolti.

(E1) $\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 \\ u(x,y) = x^3 \end{cases} \quad \begin{matrix} x^2 + y^2 \leq 4 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{matrix}$

Problema del Laplace sul cerchio, $R=2$ in coord polari:

$\begin{cases} \Delta u(\rho, \theta) = 0 \\ u(\rho, \theta) = 8 \cos 3\theta \end{cases} \quad \begin{matrix} \rho \in (0,2), \theta \in (0,2\pi) \\ \rho = 2 \end{matrix}$

La serie è nella forma

$$u(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) + \frac{a_0}{2}$$

$$u(R, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) = f(\theta)$$

Scriviamo la funzione di Fourier di $f(\theta)$

$$\bullet f(\theta) = 8 \cos^3 \theta = 8 \cos \theta \cos^2 \theta = 8 \cos \theta \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) =$$

$$= 8 \left[\frac{1}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} \cos \theta \cos 2\theta \right] =$$

$$= 8 \left[\frac{3}{4} \cos \theta + \frac{1}{4} \cos 3\theta \right] = 6 \cos \theta + 2 \cos 3\theta$$

$$\Rightarrow u(\rho, \theta) = 6 \left(\frac{\rho}{2}\right) \cos \theta + 2 \left(\frac{\rho}{2}\right)^3 \cos 3\theta =$$

$$= 3\rho \cos \theta + \frac{1}{4} \rho^3 \cos 3\theta$$

Espressioni in forma cartesiana:

$$\rho \cos \theta = x, \quad \rho^n \cos n\theta = \operatorname{Re}[(x+iy)^n]$$

$$\rho^3 \cos 3\theta = \operatorname{Re}[x^3 - 3xy^2 + \dots] = x^3 - 3xy^2$$

$$\Rightarrow u(x, y) = 3x + \frac{1}{4}(x^3 - 3xy^2)$$

$$(E2) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

classifichiamo $f(\theta) = x|y|$
($r=1$) punti

$$f(\theta) = 1 \cos \theta \cdot \frac{1}{2} |\sin \theta| = \cos \theta |\sin \theta|$$

che è il grafico di un'onda a seno con periodo $\theta \in [-\pi, \pi]$, ma la sua derivata non è nulla dove un polinomio.

Scriviamo il suo sviluppo di Fourier:

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \theta \sin \theta \cos n\theta \, d\theta$$

$$\bullet a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \theta \sin \theta \, d\theta = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin^2 \theta}{2} \Big|_0^{\pi} \right) = 0$$

$$\bullet a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin(2\theta) \cos n\theta \, d\theta =$$

$$= \left\{ \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)) \right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin((n+2)\theta) - \sin((n-2)\theta) \, d\theta \cdot \frac{1}{2} =$$

$$(n \neq 2) \quad \frac{1}{2\pi} \left[\frac{-\cos((n+2)\theta)}{n+2} + \frac{\cos((n-2)\theta)}{n-2} \right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1 - \cos((n+2)\pi)}{n+2} + \frac{\cos((n-2)\pi) - 1}{n-2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} (1 - \cos n\pi) \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n-2} \right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi} \frac{1 - \cos n\pi}{n^2 - 4} \quad (n=2) \quad 0$$

$$f(0) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1 - \cos(n\pi)}{n^2 - 4} \right) \cos n \cdot 0$$

$$\Rightarrow u(p, 0) = -\frac{2}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq 2}}^{+\infty} \left(\frac{p}{1} \right)^n \frac{1}{n} \left(\frac{1 - \cos n\pi}{n^2 - 4} \right) \cos n \cdot 0 = \quad (n=2h+1)$$

$$= -\frac{2}{\pi} \sum_{h=0}^{+\infty} \rho^{2h+1} \frac{1}{2h+1} \frac{\cos(2h+1)\pi}{(2h+1)^2 - 4}$$

$$(E3) \begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \\ u(x, 0) = e^{-x} \end{cases} \quad \begin{cases} x \in (0, 1), t > 0 \\ t > 0 \\ x \in (0, 1) \end{cases}$$

Problema di Cauchy - Dirichlet, le eq. del calore nulla
 hanno limiti, eq. omogenee, cc. nulla

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{l} \right) b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{l^2} t}$$

$$f(x) = e^{-x} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen} (n\pi x) \quad l=1$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l e^{-x} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{l} \right) dx =$$

$$= 2 \int_0^1 e^{-x} \operatorname{sen} (n\pi x) dx$$

$$I_n = \int_0^1 e^{-x} \operatorname{sen} (n\pi x) dx =$$

$$= -\frac{\cos n\pi x}{n\pi} e^{-x} \Big|_0^1 - \int_0^1 + \frac{\cos n\pi x}{n\pi} (+e^{-x}) dx =$$

$$= \frac{1}{n\pi} (-e^{-1} \cos n\pi + 1) - \frac{1}{n\pi} \left[\int_0^1 e^{-x} \cos n\pi x dx \right] =$$

$$= \frac{1}{n\pi} (1) - \frac{1}{n\pi} \left[\frac{e^{-x} \operatorname{sen} n\pi x}{n\pi} \Big|_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x}) \frac{\operatorname{sen} n\pi x}{n\pi} dx \right]$$

$$I_n = \frac{1 - e^{-1} \cos n\pi}{n\pi} - \frac{1}{(n\pi)^2} I_n$$

$$I_n \left(1 + \frac{1}{n^2 \pi^2} \right) = \frac{1 - e^{-1} \cos n\pi}{n\pi}$$

$$I_n = \frac{1 - e^{-1} \cos n\pi}{n\pi} \frac{n^2 \pi^2}{n^2 \pi^2 + 1} = \frac{e^{-1} \cos n\pi (n\pi) =}{e(n^2 \pi^2 + 1)}$$

$$= \frac{2\pi}{e} \frac{n}{n^2 \pi^2 + 1} (e - \cos n\pi) \quad \Rightarrow \quad b_n = 2 I_n$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \frac{2\pi}{e} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2 \pi^2 + 1} (e - \cos n\pi) \operatorname{sen} (n\pi x) e^{-n^2 \pi^2 t}$$

$$(E6) \begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

Discutere caso di cui dare nulla al problema
 quando $f(x) = e^x$:

$$f_1(x) = e^{-|x|}$$

$$f_2 = \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$f_3 = e^{x^2 - |x|}$$

$$f_4 = e^{|x|/3}$$

La formula analoga era quella col h (colore)

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} h(x-y,t) g(y) dy = \quad (*)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} g(y) dy$$

• Nel caso g_1 che $\in L^1(\mathbb{R})$, \rightarrow la allora che la u $\rightarrow 0$ $\forall t > 0$ e x $\in \mathbb{R}$ \rightarrow $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x,t) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ \rightarrow $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x,t) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

perché $|h(y,t)| = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}$ \rightarrow $\lim_{t \rightarrow +\infty} |h(y,t)| = 0$ $\forall y \in \mathbb{R}$ \rightarrow $\lim_{t \rightarrow +\infty} |h(y,t)| = 0$ $\forall y \in \mathbb{R}$

• Per $g_2(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \in L^1(\mathbb{R})$ non va bene come allora $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x,t) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

La $u(x,t)$ $\rightarrow 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ \rightarrow $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x,t) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ \rightarrow $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x,t) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$$g_2(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2}, \quad \frac{1}{1+x^2} \in L^1$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} h(x-y,t) \left(1 - \frac{1}{1+y^2} \right) dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} h(x-y,t) dy - \int_{\mathbb{R}} h(x-y,t) \frac{1}{1+y^2} dy$$

\rightarrow $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} h(x-y,t) dy = 1$ \rightarrow $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} h(x-y,t) \frac{1}{1+y^2} dy = 0$ \rightarrow $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x,t) = 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Anzi $u(x,t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1$

$$(E5) \begin{cases} u_t - 3\Delta u = e^{-|x|} \cos t & | \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(x,0) = e^{-|x|^2} \end{cases}$$

per il problema $\begin{cases} u_t - 3\Delta u = f(x,t) \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$ \rightarrow $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x,t) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} \parallel = \int_0^t \dots \\ \parallel = 0 \end{cases} + \dots$$

(da Duhamel)

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} h(x-y,t-s) f(y,s) dy ds$$

$$u = \int_{\mathbb{R}^n} h(x-y,t) g(y) dy$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi Dt)^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}} e^{-|y|} dy + \int_0^t \frac{1}{(4\pi D(t-s))^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4D(t-s)}} e^{-|y|} dy \cos s ds$$

che \forall la rel , $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x,t) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

• Nel caso f_3 la rel \rightarrow $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x,t) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ \rightarrow $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x,t) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$f_3 = e^{x^2 - |x|} \text{ da } rel$$

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}} e^{y^2 - |y|} dy$$

concludere:

$$e^{-\frac{x^2}{2t}} \cdot e^{x^2} \text{ da converge } \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{4Dt} = 0$$

$$\frac{1}{4Dt} > 1 \quad \boxed{t < \frac{1}{4D}}$$

$\Rightarrow u(x,t)$ è definita fino a questo istante. Oltre esplode
 Con $f(x) = e^{-1 \times 3}$ la u non è neanche definita, \neq la
 rls per $t > 0$.

(E6) risolvere $\begin{cases} u_t + u_x = \frac{1}{1+x^2} \\ u(x,0) = 0 \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$

In qdC per l'eqz del trasporto con termine di sorgente.

Se assumo $\begin{cases} u_t + u_x = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$ la rls era $u(x,t) = f(x - \frac{1}{0}t)$

Con Duhamel o
 invece al $\begin{cases} u_t + u_x = f(x,t) \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$ la rls era $u(x,t) = \int_0^t f(x - (t-s), s) ds$

da notare f è \perp da t

$$\Rightarrow u(x,t) = \int_0^t \frac{1}{1+(x-(t-s))^2} ds = \int_0^t \frac{1}{1+(x-s)^2} ds =$$

$$= \arctan(s-x) \Big|_0^t = \boxed{\arctan(t-x) + \arctan x}$$

Per temp lunghi: ed x grande e $t \rightarrow +\infty$

$$u(x,t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{x \text{ grande}} \frac{\pi}{2} + \arctan(x)$$

(E7) $\begin{cases} u_t - 2u_x + 3u = x \\ u(x,0) = 0 \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad \begin{pmatrix} \rho = 3, \\ \nu = -2 \end{pmatrix}$

Eqz del trasporto con termine di reazione e sorgente.

$$\begin{cases} u_t - 2u_x + 3u = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases} \Rightarrow u(x,t) = e^{-3t} g(x-2t)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = e^{-3t} g(x+2t)$$

o da Duhamel allora richiede la rls del problema e'

$$u(x,t) = \int_0^t e^{-3(t-s)} f(x+2(t-s), s) ds =$$

$$= \int_0^t e^{-3(t-s)} (x+2(t-s)) ds =$$

$$= \int_0^t e^{-3s} (x+2s) ds =$$

$$= \frac{-1}{3} e^{-3s} (x+2s) \Big|_0^t + \int_0^t \frac{1}{3} e^{-3s} 2 ds =$$

$$= \boxed{\frac{-1}{3} (e^{-3t} (x+2t) - x) + \frac{2}{3} \frac{1-e^{-3t}}{3}}$$

Per temp lunghi

$$u(x,t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{x \text{ grande}} \frac{1}{3} x + \frac{2}{9} = \frac{1}{3} \left(x + \frac{2}{3} \right)$$

(E8) $\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = 1 + x e^{-|x|} \\ u_t(x,0) = 2 \cos 3x \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$

BC se è zero ovunque della curva rispetto all'istante
 Anni Camila o) allora

$$u(x,t) = \frac{f(x+ct) + g(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y) dy =$$

$$= 1 + \frac{(x+ct)e^{-x+ct} + (x-ct)e^{-x-ct}}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \cos(3y) dy =$$

$$\frac{1}{c} \frac{\sin 3y}{3} \Big|_{x-ct}^{x+ct} = \frac{1}{3c} (\sin 3(x+ct) - \sin 3(x-ct))$$

(E2) $\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = e^{-t} \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = x e^{-x^2} \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$
 da separare:

(A) $\begin{cases} = 0 \\ = 0 \\ = x e^{-x^2} \end{cases}$ (B) $\begin{cases} = e^{-t} \\ = 0 \\ = 0 \end{cases}$

$$u(x,t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} x e^{-y^2} dy = \frac{1}{2c} \left[-\frac{1}{2} e^{-y^2} \Big|_{x-ct}^{x+ct} \right] =$$

$$= \frac{e^{-(x-ct)^2} - e^{-(x+ct)^2}}{4c} \quad \text{rel. A}$$

Per (B) usare Duhamel:

$$u(x,t) = \int_0^t \frac{1}{2c} \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y,s) dy ds =$$

$$= \int_0^t \frac{1}{2c} \left(\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} 1 ds \right) e^{-s} ds =$$

$$= \int_0^t \frac{e^{-s} 2c(t-s) ds}{2c} =$$

$$= \left[-e^{-s}(t-s) \Big|_0^t \right] - \int_0^t -e^{-s}(-1) ds =$$

$$= t - (t - e^{-t}) = t - t + e^{-t} \quad \text{rel. B}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = t - 1 + e^{-t} + \frac{1}{4c} \left(e^{-(x-ct)^2} - e^{-(x+ct)^2} \right)$$

(E20) $\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = \sin^2(\pi x) \\ u_t(x,0) = \sin \pi x \cos^2 \pi x \end{cases} \quad x \in (0,1), t > 0$

La sol. era

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) \right\} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$g(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$h(x) = u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{l} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$f(x) = \sin \pi x \cos^2(\pi x) = \sin \pi x \left(\frac{1 + \cos 2\pi x}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sin \pi x + \frac{1}{2} \sin(\pi x) \cos(2\pi x) =$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$$

$$= \frac{1}{2} \sin \pi x +$$

$$= \frac{1}{4} \sin \pi x +$$

$$\rightarrow \beta_1 =$$

$$\beta_2 =$$

$$p(x) = \sin$$

$$\Rightarrow u(x,t) =$$

$$+ \sin$$

$$+ \frac{1}{16}$$

(E2 di serie)

La sol.

$$u(x,t) =$$

(E21) }

Eg. di c.
 Per la

$$u(x,t) =$$

$$u_t =$$

$$u_{xx} =$$

$$u_t = 2$$

$$u_t =$$

$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \pi x + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \left(\operatorname{Re} 3\pi x + \operatorname{Re} (-\pi x) \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \operatorname{Re} \pi x + \frac{1}{4} \operatorname{Re} 3\pi x = \sum \beta_n \operatorname{Re}(n\pi x), \quad \beta_n = \beta_n \frac{n\pi c}{e}$$

$$\Rightarrow \beta_1 = \frac{1}{4} \quad \beta_2 = \frac{1}{4\pi^2} \quad \beta_3 = \frac{1}{24\pi^2}$$

$$p(x) = \operatorname{Re} 5\pi x = \frac{1}{8} \operatorname{Re} \pi x - \frac{5}{48} \operatorname{Re}(3\pi x) + \frac{1}{48} \operatorname{Re}(5\pi x)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \operatorname{Re} \pi x \left[\frac{1}{8} \cos(\pi 2t) + \frac{1}{8\pi} \operatorname{Re}(2\pi t) \right] +$$

$$+ \operatorname{Re}(3\pi x) \left[\frac{-5}{48} \cos(6\pi t) + \frac{1}{24\pi} \operatorname{Re}(6\pi t) \right] +$$

$$+ \frac{1}{48} \operatorname{Re}(5\pi x) \left[\cos(40\pi t) \right]$$

(E2 ou seri) $\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & | \quad \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u(x,0) = 1 + |x| & | \quad g(|x|) \rightsquigarrow g(p) = 1+p \\ u_t(x,0) = 0 & | \quad h(|x|) \rightsquigarrow h(p) = 0 \end{cases}$

La solt erue

$$u(x,t) = \frac{(|x|+ct) \cdot g(|x|+ct) + (|x|-ct) \cdot g(|x|-ct)}{2|x|} = \left\{ g(p) = 1+p \right\} =$$

$$= \frac{(|x|+ct)(1+|x|+ct) + (|x|-ct)(1+|x|-ct)}{2|x|} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{(|x|+ct)^2 + (|x|-ct)^2}{2|x|} =$$

$$= 1 + \frac{2|x|^2 + 2c^2t^2}{2|x|} = 1 + \frac{|x|^2 + c^2t^2}{|x|}$$

(E11) $\begin{cases} u_t - 2u_{xx} - 5u_x + 3u = 0 & | \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = x e^{-|x|} = g(x) \end{cases}$

Eg: D. diffusion / transport e react, amocrea.
 Re la solt erueu g'at' il conlit d' Erueu:

$$w(x,t) = e^{ax+bt} w(x,t)$$

- $u_t = e^{ax+bt} (b w + w_t)$
- $u_x = e^{ax+bt} (a w + w_x)$
- $u_{xx} = e^{ax+bt} (a^2 w + 2a w_x + w_{xx})$

$$u_t - 2u_{xx} - 5u_x + 3u = 0 \Rightarrow e^{ax+bt} [b w + w_t - 2a^2 w - 6a w_x - 2w_{xx} - 5a w - 5w_x + 3w] = 0$$

$$w_t - 2w_{xx} + w (b - 2a^2 - 5a + 3) + w_x (-6a - 5) = 0$$

$$\Rightarrow a = -\frac{5}{4}, \quad b = 2a^2 + 5a - 3 = \frac{50}{16} - \frac{25}{4} - 3 = -\frac{49}{8}$$

$$\Rightarrow w(x,t) = e^{-5/4 x - 49/8 t} w(x,t) \quad \text{done } w \text{ redit'ala}$$

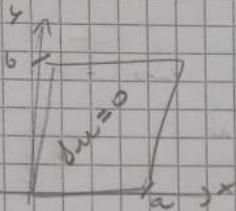
$$\begin{cases} w_t - 2w_{xx} = 0 \\ w(x,0) = e^{-ax} g(x) = e^{5/4 x} \cdot x e^{-|x|} \end{cases}$$

$$w(x,t) = \frac{1}{(6\pi 2t)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4 \cdot 2t}} e^{5/4 y} \cdot e^{-|y|} dy$$

$$\Rightarrow u(x,t) = e^{-\frac{60}{8}t} \frac{1}{(8\pi t)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{8t}} e^{-\frac{5}{6}(x-y)} y e^{-|y|} dy$$

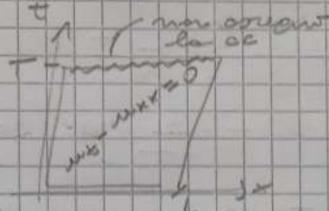
UNO SGUARDO D'INSIEME SULLE EDP VISTE

algebra standard tre edp del 2° ordine: Laplace, calore, onde.



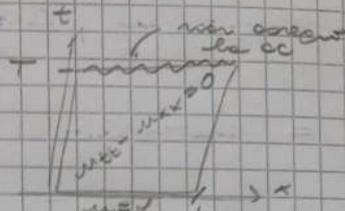
LAPLACE

è stazionaria, senza il tempo



CALORE

non è stazionario, si evolve nel tempo



ONDE

non c'è regolarità critica, la si ha la stessa reg. della ci (o peggio)

non è stazionario, si evolve nel tempo. La reg. della eqz omogenea è C^∞

perché ha le rette caratteristiche lungo le quali si trasmette e impaginerà

Tale di modo stretto da

principio di massimo (idea geometrica)

principio dell'energia (idea fisica)

Perché eqz con i dati iniziali hanno proprietà con obbligo? Perché non delle costanti di tre ordini (regole di eqz differenziali).

Sono i prototipi di tre classi di EDP:

eqz ellittici	Laplace
eqz parabolici	calore
eqz iperbolici	onde

Standard EDP del 2° ordine, in \mathbb{R}^n prolungare a coeff. var. nec. costanti (n variabile complessive).

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{h=1}^n b_h(x) u_{x_h} + c(x) u$$

$$\text{o vice} \quad \sum_{i,j} (a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + b_j(x) u_{x_j}) + \sum_{h=1}^n c_h(x) u_{x_h} + d(x) u$$

nella forma di divergenza, la prima era in forma di non-divergenza

Definiamo parte principale quella con le derivate seconde:

$$Au = \sum_{i,j} a_{ij}(x) u_{x_i x_j}$$

Def. Dato un operatore differenziale del 2° ordine con parte principale

$$Pu = a(x,t) u_{xx} + b(x,t) u_{xt} + c(x,t) u_{tt}$$

partita $A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$ ovvero che l'operatore è

ellittico
parabolico
iperbolico

28/03

con il discriminante di $ay^2 + by + c = 0$.
 Def: $u = u(x, t)$ è quadrato (ell/par/ipb nel punto (x, t)), se vale $b^2(x, t) \geq 0$ e $b^2(x, t) > 0$ rispettivamente.

Es. (E2) $Lu = u_{tt} - t u_{xx}$ è detto iperbolico, e dipende dal dominio con cui classifichiamo.

Def: In operatori L lineare del 2° ordine con parte principale $Au = \sum_{i,j} (a_{ij}(x) u_{x_i x_j})_{x_j}$ o $Au = \sum_{i,j} a_{ij}(x) u_{x_i x_j}$

è detto ellittico nel punto x se la matrice $A = [a_{ij}]$ è definita (positiva o negativa)

è detto ellittico nel dominio R se vale $b^2(x) \in R$, mentre indefinitamente ellittico in R se

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2 \quad (\text{con } \lambda > 0 \text{ o } \lambda < 0, \text{ non indefinitamente})$$

Def: In operatori L come sopra è detto iperbolico se la matrice

$$A = [a_{ij}] \text{ è indefinita: } \exists \xi, \eta \in \mathbb{R}^m: A\xi < 0, A\eta > 0$$

con se la forma quadratica $\sum_{i,j} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j$ è indefinita, come sopra per $\xi \in \mathbb{R}^m$.

Def: In operatori L come sopra è detto parabolico se è nella forma

$$Lu = u_t - \sum_{i,j} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_k b_k(x) u_{x_k} + c(x) u$$

con la parte dopo u_t che sia parabolica. Da cui, ragionando le classifichiamo parabolico in R e indefinitamente iperbolico in R . (con $A = [a_{ij}]$ definita)

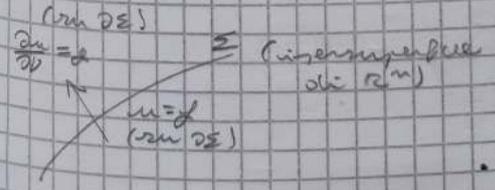
Insomma, viene di la forma quadratica sia definita, con quella richiesta speciale.

Come, la parte principale di un eqz parabolica converge allora u_t e $u_{x_i x_i}$.

Proprietà le vari operatori. che quadrati

- (a) iperbolico al contorno (traslocare di)
- (b) proprietà di regolarizzazione
- (c) tecnica di monotonicità

(a) Condizioni di Cauchy (non allora ista solo quella nella forma $t=0$) o estende in:



• Ell: no pbc, solo pbc al contorno

• Ipb: si pbc (global o con cc) se derivata limitata

Le condizioni di Cauchy possono essere date solo su certe superfici: Σ deve essere non-caratteristica (cioè non quella su cui si impone il problema)

Pub: pdc (classici o con cc re bitate), ma con
 le ci
 (b) = l'inf ell o inf pub (con coeff C^0 o non costanti)
 risoluzioni o con la rel, o con un'una C^0 .
 Se i coeff hanno regolarità bitate saranno vincolati.
 Tpl: non regolarità

Operazioni decore.
 $L u = u_{xx} + x^2 u_{yy}$ è definito positivo per $x > 0$, ma non
 $x = 0$ non hanno bene, lo rende un' "indeterminato"
 partono.
 ⇒ delimito operatori decore se non definito per
 ma per quelle x è solo definito pos.
 E non è detto che regolarità.
 $L u = u_x + u_x + u_{yy} + u_x$, è manca il termine u_{xx} nella
 parte principale, che diventa ellittica in $h \pm n-1$ variabili.
 ⇒ in equazione così è detto ultraipercaratteristico.

CONCETTI DIVERSI DI "SUE" PER UNA EDP

L'idea di rel dipende dalla classe dell' edp e dalla
 regolarità dei dati.
 (1) C'è giudizio di generale che vale per tutte le edp?
 Si ma no.
 Teln di Carathéodory - Harnack. Se un pdc per una edp di
 ordine k qualunque in n variabili, e coeff analitici
 reali (come in AN3, risolubile in E di ordine in
 op. $M(x)$).

Se alle n dati della ci e la E ipercaratteristica sono
 ⇒ la rel \exists !

(2) Contesto della teoria della distribuzione. Trattiamo
 edp più leggere di prima, coeff C^0 . Reche)

$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$ se $T \in C^0(\mathbb{R})$, $\varphi \in D(\mathbb{R}) \in T \in D(\mathbb{R})$

E possiamo vedere l'operatore differenziale $L: D'(\mathbb{R}) \rightarrow D'(\mathbb{R})$

• pdc della risolubilità: \forall dati $T \in D'(\mathbb{R}) \exists$ una rel
 $u \in D'(\mathbb{R})$: $L u = T$?

• pdc della regolarità: se $T \in C^0$ anche la rel u lo è?

Si possono definire operatori differenziali lineari L
 localmente risolubili e ipercaratteristici.

Nel caso di coeff costanti, $L = \sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha D^\alpha$. Con lui
 abbiamo rel localmente $\mathbb{R} \in D'(\mathbb{R}^n)$:

$L \mathbb{R} = f_0$ in $D'(\mathbb{R}^n)$

Teln di Malgrange - Eidelman. Un operatore dell'edp L e
 coeff costanti, di qualunque ordine, ha una rel
 localmente risolubili e ipercaratteristici.

E ora in tln di rinvio alla regolarità.

(3) In classe, lavoriamo ora con coeff C^k , umani
 mostrando se chiediamo che la rel u sia analitica
 nel dominio richiesto.

Per esempio
 è e ricerca
 ma la
 Il "quantità"
 di "bitate"
 (4) la del
 esempio)
 Ma lavoro
 e lavoro
 su spazio

SIGNIFICATI

La relazione
 enumerata
 egua.
 Si sono
 - re C^k
 - re C^0
 tra
 Della rel
 colse e

DERIVATA

Teorema
 per la
 Def. Deriv
 di Green
 $\exists \varphi \in C^1$

$\int_{\mathbb{R}} \varphi$

E sono

Che nel
 $\forall \varphi \in C^1$

Per esempio per una eqd del 2° ordine come $\Delta u = f$ con $f \in C^0$ si può avere $u \in C^1$ o anche $u \in C^2$ a seconda delle condizioni al contorno.

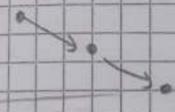
(a) il Δ debole, coeff $\in C^0(\Omega)$, non si holdano (non C^0 per esempio). Per Δ debole si hanno alla frontiera Γ i dati $u|_{\Gamma}$ e $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma}$. Per Δ forte si hanno $u|_{\Gamma}$ e $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma}$ e $u \in C^2$ nel Ω .

SIGNIFICATI PROBABILISTICI DI ALCUNE EQD

La relazione tra i due argomenti è data dal teorema di Itô e dal teorema di Feynman-Kac.

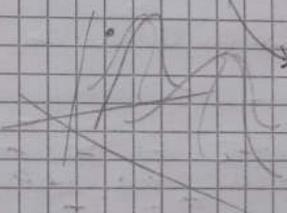
Si pensa a una $X_t \sim f(x,t)$ movimento browniano.
 - se $u(x,t)$ è la distribuzione nella x
 - se $u(x,t)$ è regio la particella (costante la sua traiettoria).

Dalla relazione si possono trovare collegamenti con l'eqd del calore e l'eqd di Laplace.



controllore di transitorio

Se si fosse solo giocato avanzando la certezza nel tempo



Eqd diff. stocastica

controllore di diffusione

Con questa particella invece di risolvere la rel me gioca avanzando l'incertezza

DERIVATA DEBOLE E SPAZI DI SOBOLEV

Teoria che viene prima (1935) rispetto a quella di Schwartz con le distribuzioni (1950).

Def. Derivata debole di una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Sia $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, avremo che f è derivabile in senso debole se $\exists g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tale che

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \phi'(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} g(x) \phi(x) dx$$

$\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ o $\phi \in C_0^1(\mathbb{R})$

È conveniente $f = g$, derivata debole di f . Quindi in teoria giunta non è l'operazione come idea

$$\int f \phi' = - \int f' \phi$$

che relazione la colle derivata distribuzionale?

$\forall f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ possiamo considerare $T_f: D'(\mathbb{R})$ che essa con:

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \phi(x) dx$$

È ogni $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ è distribuzione, con T' definita da

$$\langle T', \varphi \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle$$

Se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ allora $\int T_f$ ed $\int T'_f$, $\in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ entrambe. Anche nel caso delle distribuzioni (come δ e $f \in L^1_{loc}$ non sono distribuzioni).

Ma $(T_f)'$ in generale è una distribuzione che potrebbe non essere distribuzione con una funzione.

Se invece $\exists \varphi \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) : (T_f)' = T_\varphi$ allora φ è la derivata debole di f .

ogni distribuzione è derivabile mentre non ogni $f \in L^1_{loc}$ è derivabile in senso debole

Es. (E1) $f(x) = |x| \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi'(x) dx &= \int_0^{+\infty} x \cdot \varphi'(x) dx - \int_{-\infty}^0 x \varphi'(x) dx = \\ &= \left[x \varphi(x) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 1 \cdot \varphi(x) dx - \left[x \varphi(x) \right]_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 1 \cdot \varphi(x) dx = \\ &= - \left\{ \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx - \int_{-\infty}^0 \varphi(x) dx \right\} = \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \cdot \text{sgn}(x) dx \end{aligned}$$

Perciò \exists la derivata debole di $|x|$, ed è

$$(|x|)' = \text{sgn}(x)$$

|| note in \mathbb{R} . La derivata sgn è un oggetto globale. Il $\text{sgn}(x)$ di \mathbb{R} vale solo in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. questo è un oggetto globale sgn , e cioè come oggetto globale.

(E2) $\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$, è un oggetto (ha una orientazione)

$$\int_{\mathbb{R}} \text{sgn}(x) \varphi'(x) dx = \int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx = -\varphi(0) = -\langle \delta, \varphi \rangle$$

$\Rightarrow (T_{\text{sgn}})' = \delta$, nel senso delle distribuzioni

Ma $\exists \varphi \in C^1_{loc}(\mathbb{R})$ tale che $-\int_{\mathbb{R}} \text{sgn}(x) \varphi'(x) dx = \varphi(0) \forall \varphi \in C^1_0$.

Anche se sgn non è derivabile in senso debole.

Def. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Diciamo che $\exists \frac{\partial f}{\partial x_j}$ in senso debole (per qualche $j = 1, \dots, n$) se

$$\exists g \in L^1_{loc}(\Omega) : \int_{\Omega} f(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} dx = - \int_{\Omega} g(x) \varphi(x) dx$$

e in tal caso scriviamo $\frac{\partial f}{\partial x_j} = g$

Spazio di Sobolev (funzioni derivabili in senso debole).

Consideriamo che se $f \in L^p(\Omega)$ per $p \in [1, +\infty]$ allora anche $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. C'è un L^p e poi esiste L^1_{loc} . ($\in L^p \Rightarrow \in L^1_{loc}$)

Def. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $p \in [1, +\infty]$, chiamiamo

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ f \in L^p(\Omega) : \exists \frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^p(\Omega) \right\}$$

in senso debole

spazio di Sobolev.

7. $p=2$ o serie orle

$$W^{2,2}(\Omega) = H^2(\Omega)$$

$\Rightarrow W^{2,p}(\Omega)$ è lo spazio delle Ca EUTRN) tali che ∇ la loro derivata debole è anche la ∇ $L^p(\Omega)$

Defin. Gli spazi $W^{2,p}(\Omega)$ muniti della norma

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p} + \sum_i \|u_{x_i}\|_{L^p}$$

è uno spazio di Banach. È lo spazio $H^2(\Omega)$ col prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle_{H^2} = \int_{\Omega} f(x)g(x) dx + \int_{\Omega} \sum_i f_{x_i}(x)g_{x_i}(x) dx$$

è uno spazio di Hilbert. (caratterizzato da a norma reali comprese)

È interessante una norma integrale per estendere la def di ∇ nel caso di derivata debole dell'EDP.

Defin. (nel caso $p=2$ quindi $H^2(\Omega)$). $H^2(\Omega)$ è uno spazio retrospazio perché ∇ lo è e perché il concetto di derivata debole è bilineare:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (f+g) = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{\partial g}{\partial x_j}$$

perché si applica alle derivata delle ∇ e ∇ bilineare.

Sono anche monotoni: il quadrato scalare

$$\langle f, f \rangle_{H^2} = \int_{\Omega} (f^2 + |\nabla f|^2) dx$$

è bilineare e commutativo

$$\langle f, f \rangle = \|f\|_{L^2}^2 + \|\nabla f\|_{L^2}^2 \geq 0$$

$$\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow \|f\|_{L^2}^2 = 0 \Rightarrow f = 0 \text{ p.p.}$$

mostriamo la completezza.

Se $\{f_n\} \subset H^2(\Omega)$ una seq di Cauchy, usi

$$\|f_n - f_m\|_{H^2}^2 \xrightarrow{n, m \rightarrow +\infty} 0$$

$$= \|f_n - f_m\|_{L^2}^2 + \sum_j \left\| \frac{\partial f_n}{\partial x_j} - \frac{\partial f_m}{\partial x_j} \right\|_{L^2}^2 \xrightarrow{n, m \rightarrow +\infty} 0$$

Allora $\Rightarrow \{f_n\}$ è di Cauchy in L^2 e $\left\{ \frac{\partial f_n}{\partial x_j} \right\}$ è di Cauchy in L^2 per ogni j

È L^2 completo, quindi le seq di Cauchy sono convergenti:

$$\forall f \in L^2 : f_n \xrightarrow{L^2} f$$

$$\forall g_1, \dots, g_m \in L^2 : \frac{\partial f_n}{\partial x_j} \xrightarrow{L^2} g_j \quad \forall j$$

Proviamo che $g_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$ in senso debole. $f \in C^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f_n}{\partial x_j} \varphi dx = - \int_{\Omega} f_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx \quad \forall \varphi$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} g_j \varphi dx = - \int_{\Omega} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx$$

perché la $f \in H^2$ quindi per loro derivata debole

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \rho_j \varphi = - \int_{\Omega} \rho \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$$

$\Rightarrow \exists$ in senso debole

$$f_u \xrightarrow{L^2} f \in H^1(\Omega)$$

$$\frac{\partial f_u}{\partial x_j} \xrightarrow{L^2} \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

$\Rightarrow f_u \xrightarrow{H^1} f$
e H^1 allora è completo \square

perché norme $\|\cdot\|_{H^1}$ e $\|\cdot\|_{L^2}$ sono equivalenti

per la convergenza debole $\|f_n - f\|_{H^1} \rightarrow 0$

Osserviamo che $H^1(\Omega) \subseteq L^2(\Omega)$ con inclusione continua,

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{H^1(\Omega)}$$

Es. (01) La derivata debole di una χ_{Ω} , se \exists , è unica (quasi ovunque).

(02) Vali un:

Es. Tra $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n$ in domini (case aperte e compatte).
Se $f \in H^1(\Omega)$ e $\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0$ in Ω $\forall j = 1 \rightarrow n$

allora $\Rightarrow f$ è costante.

Le funzioni in $H^1(\Omega)$ possono essere "irregolari" rispetto alle $\partial \Omega$ (C¹?)
quelle domini derivabili (con \pm solo in senso debole normale)

In \mathbb{R} è locale: caso 1-dimensionale.

Es. Tra $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ in intervallo. Allora

$f \in H^1(\mathbb{I}) \Leftrightarrow$ (1) $f \in C^0(\mathbb{I}) \cap L^2(\mathbb{I})$
 (2) f è derivabile in senso classico q.o., e detta f' la sua derivata classica si deve avere $f' \in L^2$ e
 $f(x_2) - f(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f'(t) dt \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{I}$

È in tal caso f è anche la derivata debole

\Rightarrow in $H^1(\Omega)$ si possono trovare funzioni continue, ma con qualche eccezione alla derivata che lo rendono compatte L^2

Es. (E1) $f(x) = x^\alpha$, per quale α si ha $f \in H^1(0,1)$?

$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, resta da

$$\int_0^1 x^{2\alpha-2} dx < +\infty \Leftrightarrow \frac{2\alpha-2}{2} > -1 \Rightarrow \alpha > 1/2$$

\Rightarrow per esempio $x^{3/4} \in H^1(0,1)$ e $|x|^{3/4} \in H^1(-1,1)$

Convergenza: perché se $f_n \xrightarrow{L^2} f$ allora $\int f_n \varphi \rightarrow \int f \varphi$?

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} f_n \varphi - \int_{\Omega} f \varphi \right| &= \left| \int_{\Omega} (f_n - f) \varphi \right| \leq \\ &\leq \underbrace{\|f_n - f\|_{L^2}}_{\rightarrow 0} \|\varphi\|_{L^2} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

È male anche in generale:

$f_n \xrightarrow{L^2} L \} \Rightarrow \int f_n p_n \rightarrow \int f p$
 $f_n \xrightarrow{L^2} L$

$$\begin{aligned}
 \left| \int f_n p_n - \int f p \right| &= \left| \int f_n (p_n - p) + \int p (p_n - p) \right| \leq \\
 &= \underbrace{\|f_n\|_2}_{\rightarrow \|f\|} \underbrace{\|p_n - p\|_2}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\|p\|_2}_{=k} \underbrace{\|p_n - p\|_1}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

In dimensione 1 le L^2 non sono quelle C^0 necessariamente.
 In \mathbb{R}^n $n > 1$ le $L^2(B_1(0))$ possono anche essere discontinue e illimitate.

Caso $(n > 1)$ - Dimensionale. Studiamo $f(x) = |x|^\alpha$, per quali α $f \in H^1(B_1(0))$?

$$\int_{B_1(0)} |f(x)|^2 dx = c \int_0^1 (\rho^\alpha)^2 (\rho^{n-1} d\rho) \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \alpha > -n/2$$

per avere $f \in L^2(B_1(0))$. Neanche per avere $(\nabla f)_i \in L^2$ vediamo $\|\nabla f\| \leq c \cdot |x|^{\alpha-1}$, lo $\in L^2$ quando?

$$\int_0^1 \rho^{2\alpha-2} \rho^{n-1} d\rho \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \alpha > 1 - \frac{n}{2}$$

$\Rightarrow |x|^\alpha \in H^1(B_1(0)) \Leftrightarrow \alpha > 1 - n/2$

In $\mathbb{R}^{n \geq 3}$, se $1 - n/2 < \alpha < 0$ la $f(x) = |x|^\alpha$ è discontinua, illimitata, ma $H^1(B_1(0))$.

In \mathbb{R}^2 cerchiamo un esempio con $f(x) = (-\ln|x|)^\alpha$ anche con $|x| < 1$. Studiamo

$$\int_{B_1(0)} |f(x)|^2 dx = c \int_0^1 |\ln \rho|^{2\alpha} \rho d\rho \rightarrow +\infty \text{ sempre}$$

$$\|\nabla f\| = c \cdot \frac{|\ln|x||^{\alpha-1}}{|x|}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{B_1(0)} \|\nabla f\|^2 dx &= c \int_0^1 \frac{|\ln \rho|^{2\alpha-2}}{\rho^2} \rho d\rho = \\
 &= c \int_0^1 \frac{1}{\rho |\ln \rho|^{2-2\alpha}} d\rho \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 2-2\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha < 1/2
 \end{aligned}$$

Anche $f(x,y) = (-\ln \sqrt{x^2+y^2})^{1/2}$ è una discontinua e illimitata ma $H^1(B_1(0))$.

Ma la discontinuità e queste (come 1.3.7) non ci impediscono di studiare derivate.

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto, Ω_r non ha derivate deboli. Ω_r è un aperto di \mathbb{R}^n , e f è bilip (di Lipschitz). Se Ω_r è un aperto di \mathbb{R}^n , e f è bilip in Ω_r , allora

$\Rightarrow f$ è derivabile in senso classico, e $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^\infty(\Omega_r)$, e queste derivate classiche sono le derivate deboli.

In particolare, se Ω_r è liscio, $f \in \text{Lip}(\Omega_r) \Rightarrow f \in H^1(\Omega_r)$ e $f, \|\nabla f\| \in L^\infty(\Omega_r)$

Valore Insieme e GP - scadenze profili MIFID uso in perimetro - Anticrima Sc...

regole di calcolo delle derivate deboli.

• Definizione del prodotto. Se $f \in H^1(\Omega)$ e $g \in L^1(\Omega)$ allora $fg \in H^1(\Omega)$ e vale che

$$(fg)_{x_j} = \underbrace{f_{x_j} g}_{\in L^1} + \underbrace{f g_{x_j}}_{\in L^1} \rightarrow \text{addebolle}$$

$\xrightarrow{EL^2} \quad \xrightarrow{EL^2} \quad \xrightarrow{EL^2} \quad \xrightarrow{EL^2} \quad \rightarrow \text{ha senso}$

se considero due funzioni il loro prodotto potrebbe essere in L^1

Campione, se considero un mollatore ed aiuto per EDP ci restano il concetto di $C_0^\infty(\Omega)$ che sia "zero sul bordo".

Cosa c'è di non ovvio? Il DZ non esiste di natura nulla (comp. $\partial\Omega$), e non distinguono le differenze $\partial\Omega$.

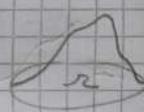
Se $f \in H^1(\Omega)$ f è debole "a zero" di natura $\partial\Omega$ quindi il valore di f su un punto o in un insieme di misura nulla non è definito e quindi.

Se Ω è un aperto, $\partial\Omega$ in generale ha $\chi(\partial\Omega) = 0$.

Cosa significa allora che $u \in H^1(\Omega)$ e $u = 0$ su $\partial\Omega$?
Lo dimostriamo ad hoc.

Def. Si introduce $H_0^1(\Omega)$ e viene

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ f \in H^1(\Omega) \text{ e tal che } \exists \{ \varphi_n \} \subseteq C_0^\infty(\Omega) : \varphi_n \xrightarrow{H^1} f \right\}$$



Quindi

$$H_0^1(\Omega) = \text{la chiusura di } C_0^\infty(\Omega) \text{ in } H^1(\Omega)$$

$H_0^1(\Omega)$ è un sottospazio di $H^1(\Omega)$ ed è un spazio di Hilbert.

In altre parole $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}$ le funzioni $H^1(\Omega)$ erano anche $C^0(\Omega)$, quindi si annullano proprio sul bordo in modo classico.

Alc. $H_0^1(a,b) = \left\{ f \in H^1(a,b) : f(a) = f(b) = 0 \right\}$ \rightarrow con la chiusura tranquillo

(in realtà non sono anche $C^0(a,b)$ allora)

In \mathbb{R}^m invece

Alc. Se $f \in H^1(\Omega)$ e $g \in H_0^1(\Omega)$ allora vale

$$\int_{\Omega} f_{x_j} g = - \int_{\Omega} f g_{x_j}$$

che è l'integrazione per parti come se g fosse $= 0$ al bordo.

Dim. $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ vale

$$\int_{\Omega} f_{x_j} \varphi = - \int_{\Omega} f \varphi_{x_j} \quad (\text{per def di derivate deboli di } f)$$

$$f \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow \exists \{ \varphi_n \} \subseteq C_0^\infty(\Omega) : \varphi_n \xrightarrow{H^1} f$$

$$\left. \begin{aligned} \text{quindi } &\rightarrow \varphi_n \xrightarrow{L^2} f \\ &\searrow \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_j} \xrightarrow{L^2} \frac{\partial f}{\partial x_j} \end{aligned} \right\} \text{perché } \|\cdot\|_{L^2} \leq \|\cdot\|_{H^1} \text{ quindi } \rightarrow \text{anche } \rightarrow 0$$

allora

allora

$$\int_{\Omega} \underbrace{f(x) \cdot x_j}_{\in \mathcal{H}^1(\Omega)} = - \int_{\Omega} x_j \cdot \underbrace{\Delta u}_{\in \mathcal{H}^1(\Omega)} \rightarrow - \int_{\Omega} x_j \Delta u$$

$$\rightarrow \int_{\Omega} \Delta f(x) \quad \square$$

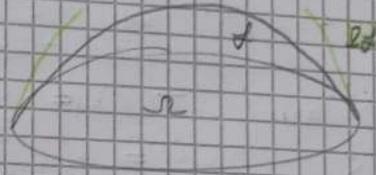
Lemma (Divergenza di Poincaré)

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un dominio limitato allora $\exists C_n > 0$:

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq C_n \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}$$

è vero solo per $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, quello nullo su \mathbb{R}^n , allora ho zero (nessun controllo la derivata)

mentre appunto non vale se Ω non nullo al bordo
 Controes: $f(x) = c, \Delta f = 0$



Dim. Proviamo per prima cosa su $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $f \in C^1(\Omega)$. Consideriamo

$$I = \int_{\Omega} \operatorname{div} \left(\underbrace{x \cdot f(x)^2}_{\in \mathcal{H}^1(\Omega)} \right) dx$$

$$\operatorname{div} \left(\begin{matrix} x_1 f(x)^2 \\ \vdots \\ x_n f(x)^2 \end{matrix} \right) =$$

Ma è facile:

$$I = \int_{\Omega} x \cdot \nabla f^2 dx = 0$$

(perché $f=0$ nullo su $\partial\Omega$)

$$= \sum_i f(x)^2 + 2x_i f(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} =$$

$$= n f(x)^2 + 2 f(x) x \cdot \nabla f$$

$$\Rightarrow 0 = n \int_{\Omega} f(x)^2 dx + 2 \int_{\Omega} f(x) \cdot x \cdot \nabla f dx$$

$$\int_{\Omega} f(x)^2 dx = \frac{-1}{n} \int_{\Omega} f(x) \cdot x \cdot \nabla f dx \quad \text{Thicksten}$$

$$\text{(via 1.1)} \leq \frac{2}{n} \|f\|_{L^2} \left(\int_{\Omega} |x \cdot \nabla f|^2 dx \right)^{1/2} \leq$$

$\left. \begin{matrix} \Omega \text{ è limitato} \Rightarrow \Omega \subset B_R(0) \text{ per } R \text{ grande} \\ \text{funz. } |x \cdot \nabla f| \leq R \cdot \|\nabla f\| \end{matrix} \right\}$

$$\leq \frac{2R}{n} \|f\|_{L^2} \|\nabla f\|_{L^2}$$

perché $|x \cdot \nabla f| \leq$
 $\leq \|x\| \cdot \|\nabla f\| \leq$
 $\leq \left(\sup_{\Omega} \|x\| \right) \cdot \|\nabla f\| \leq$
 $\leq R \cdot \|\nabla f\|$

$$\Rightarrow \|f\|_{L^2}^2 \leq \frac{2R}{n} \|f\|_{L^2} \cdot \|\nabla f\|_{L^2}$$

$$\|f\|_{L^2} \leq \underbrace{\left(\frac{2R}{n} \right)}_{C_n} \|\nabla f\|_{L^2}$$

Quanto a non $\forall f \in C^1(\Omega)$ se $f \in \mathcal{H}^1(\Omega)$, non è vero
 $\exists f \notin C^1(\Omega)$ tale che $\nabla f \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ allora \exists la non

$$\|f\|_{L^2} \leq C_n \|\nabla f\|_{L^2} \rightarrow \|\nabla f\|_{L^2}$$

$\forall f$ (non è vero) (perché $C_n \neq 1$)

\square

Conseguenza delle sbn su R^n:

Car. su $H_0^1(\Omega)$ la norma H^1 è equivalente alla norma su L^2 dell'operatore \mathcal{L} :

$$\|f\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\mathcal{L}f\|_{L^2(\Omega)}$$

perché:

$$\|f\|_{H^1}^2 = \|f\|_2^2 + \|\mathcal{L}f\|_2^2 \quad (\text{da Poincaré!}) \quad (\geq \|\mathcal{L}f\|_2^2)$$

$$\leq (C\|\mathcal{L}f\|_2)^2 + \|\mathcal{L}f\|_2^2$$

$$\Rightarrow \|\mathcal{L}f\|_2 \leq \|f\|_{H^1} \leq \sqrt{1+C^2} \|\mathcal{L}f\|_2$$

Ch è il duale dello spazio $H_0^1(\Omega)$?

Sig $T \in H_0^1(\Omega)^*$ (\Rightarrow funzionale lineare continuo). Perché $H_0^1(\Omega)$ è si vale il teo di rappresentazione di Riesz:

$$\exists f \in H_0^1(\Omega) : T(\varphi) = \langle f, \varphi \rangle_{H^1} \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

$$\text{dove } \langle f, \varphi \rangle_{H^1} = \langle f, \varphi \rangle_{H_0^1} = \int_{\Omega} (f\varphi + \mathcal{L}f \cdot \mathcal{L}\varphi) dx$$

È interessante vedere T come distribuzione. Prendiamo la cut test allora:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \subseteq H_0^1(\Omega)$$

$$T(\varphi) = \int_{\Omega} (f\varphi + \sum_{i,j} \mathcal{L}_{ij} \varphi_{x_i}) dx =$$

$$= \langle f, \varphi \rangle - \sum_{i,j} \langle (\mathcal{L}_{ij})_{x_i}, \varphi \rangle$$

$$\Rightarrow T = f - \sum_{i,j} (\mathcal{L}_{ij})_{x_i}$$

perché $f \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow f_{x_i} \in L^2 \Rightarrow (\mathcal{L}_{ij})_{x_i} \in \mathcal{D}'(\Omega)$, che sono come distribuzioni.

Per essere generale, consideriamo $n+1$ termini:

$$f_0, f_1, \dots, f_n \in L^2(\Omega)$$

e la distribuzione

$$T = f_0 - \sum_{i,j} (f_{ij})_{x_i}$$

$$\Rightarrow \langle T, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f_0 \varphi + \sum_{i,j} \int_{\Omega} f_{ij} \varphi_{x_i} \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\Omega))$$

prima domanda della sezione semplice alle, no niente pe' semplice, non estendere in modo non questo funzionale T a tutto $H_0^1(\Omega)$.

La semplice la semplice uso $\forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$. È quindi

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq \left| \int_{\Omega} f_0 \varphi \right| + \sum_{i,j} \left| \int_{\Omega} f_{ij} \varphi_{x_i} \right| =$$

$$\leq \|f_0\|_2 \|\varphi\|_2 + \sum_{i,j} \|f_{ij}\|_2 \|\varphi_{x_i}\|_2 \leq$$

$$\leq C \cdot \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \quad \text{dove } C = \|f_0\|_2 + \sum_{i,j} \|f_{ij}\|_2$$

Quindi $T \in H_0^1(\mathbb{R})^*$ e

$$\|T\|_{H_0^1(\mathbb{R})^*} = \|f_0\|_2 + \sum \|f_i\|_2$$

Un funzionale di $H_0^1(\mathbb{R})$ si identifica con lo spazio delle

$$T = f_0 - \sum (f_i) x_i$$

con $f_i \in L^2(\mathbb{R})$ $b_i = 0 \rightarrow m$, e in tal caso

$$\|T\| = \|f_0\|_2 + \sum \|f_i\|_2$$

Integrale di la sottintesa di un elemento $T \in H_0^1(\mathbb{R})^*$ nella forma sopra non è unica.

Lo spazio $H_0^1(\mathbb{R})^*$ si identifica anche con $H^{-1}(\mathbb{R})$

È come se il elemento del duale fosse la derivata di una L^2 .

Es. (E1) In una variabile. Otteniamo che $\delta \in H_0^1(-1,1)^*$

$$\delta = u'(x)$$



è in $L^2(-1,1)$. In più variabili invece $\delta \notin H_0^1(B_{1/2}(0))^*$.
In \mathbb{R}^n la H_0^1 potrebbe essere disconnessa e illimitata, ma

$\langle \delta, \varphi \rangle$ per $\varphi \in H_0^1(B_{1/2}(0))$ non è definito.

In \mathbb{R}^{2n+2} (più variabili) sia $T = \partial x_i (\chi_{B_{1/2}(0)}(x))$.

Allo stesso modo che $\chi_{B_{1/2}(0)} \in H^1(\mathbb{R}^n)$ (per la disconnessione), ma sta funzionando in L^2 .

$\Rightarrow T$ è la derivata di una L^2 $\Rightarrow T \in H^{-1}(\mathbb{R}^n)$.

Come appare?

$$\begin{aligned} \langle T, \varphi \rangle &= \langle \partial x_i (\chi_{B_{1/2}(0)}(x)), \varphi \rangle = \\ &= - \langle \chi_{B_{1/2}(0)}, \varphi x_i \rangle = - \int_{B_{1/2}(0)} \varphi x_i dx = \text{per parti} \\ &= - \int_{\partial B_{1/2}(0)} \varphi(x) x_i dx \end{aligned}$$

Spazio di Sobolev delle L^2 derivabili più volte.

Definiamo derivata debole di ordine superiore, come in AN1 come usuali. Derivate deboli ricorsive:

Def. Se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ le derivate deboli $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ si definiscono iterativamente:

diremo che $f \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ in senso debole se

- $f \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ derivata debole

- e a sua volta questa è la derivata debole $\frac{\partial}{\partial x_i} (f \frac{\partial}{\partial x_j}) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Quindi:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \varphi = - \int_{\mathbb{R}} f \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}$$

In generale, se $f \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ con α multi-indice, vale

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $|\alpha| = \sum \alpha_i$, vale che

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha} = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}$$

quindi si riconosce la derivata su φ con un segno opposto.

Allora definiamo

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^n) : \begin{array}{l} \text{Fino a un certo punto debole tutte le} \\ \text{derivata } \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} \text{ per } |\alpha| \leq m \text{ e} \\ \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} \in L^2(\mathbb{R}^n) \end{array} \right\}$$

Se $f, g \in H^m(\mathbb{R}^n)$ poniamo def un prod scalare

$$\langle f, g \rangle_{H^m} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(fg + \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^\alpha g}{\partial x^\alpha} \right) dx$$

che induce la norma

$$\|f\|_{H^m}^2 = \|f\|_2^2 + \sum_{|\alpha| \leq m} \left\| \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} \right\|_2^2$$

e sono anche loro spazi di Hilbert.

Approssimazione di L^2 su spazi di Sobolev con L^2 più regolari.

Veniamo a esaminare L^2 su $H^1(\mathbb{R})$, ma non $H_0^1(\mathbb{R})$, con L^2 più regolari.

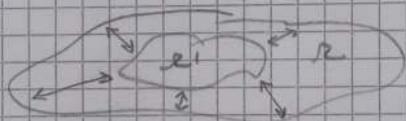
Ci sono due tipi di risultati: appross

- locale (ovvero all'interno di \mathbb{R} , \mathbb{R}^n).
- globale (ovvero su tutto \mathbb{R}).

Quelli globali richiedono lip di regolarità sul dominio oltre (però esistono anche \mathbb{R}^n).

Vali di approssimazione locale).

Esista $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n$, \forall aperto $\mathbb{R}' \subset \mathbb{R}$



due contenitori con compattezza

($\mathbb{R}' \subset \mathbb{R}$), ma non ci si richiede nulla regolarità di \mathbb{R}

$\forall u \in H^1(\mathbb{R}) \exists$ una succ $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset C^\infty(\mathbb{R})$ tale che $\|u_n - u\|_{H^1(\mathbb{R}')} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Vali di approssimazione globale). Più di un risultato

(1) $\mathbb{R} = \mathbb{R}^n$

Vali. $D(\mathbb{R}^n)$ è denso in $H^1(\mathbb{R}^n)$

ovvero $\forall u \in H^1(\mathbb{R}^n) \exists \{u_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che $\|u_n - u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

ovvero $H_0^1(\mathbb{R}^n) = H^1(\mathbb{R}^n)$

(2) Approssimazione globale su \mathbb{R} , per $\mathbb{R} \neq \mathbb{R}^n$.

Def. Lo spazio delle L^2 approssimabile da C^∞ è il

Se $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n$
 $D(\mathbb{R})$

Vali di \mathbb{R}^n , allora $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n$

Conoscere $\Rightarrow \| \cdot \|$
Se $f \in L^2$
 $\Rightarrow \| f \|$

Si può $\exists \{ f_n \}$
 $\int_{\mathbb{R}^n}$

Tracci. Allora dato $\{ f_n \}$

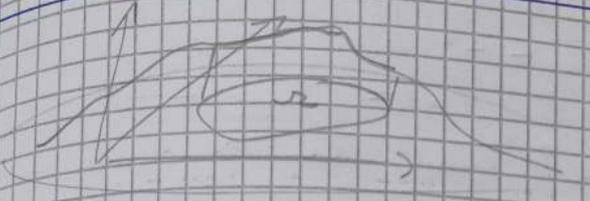
Per u
 $\{ f_n \}$

Ma $\{ f_n \}$

e un $\{ f_n \}$

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Chiamiamo

$$D(\Omega) = \left\{ f \in C^0(\overline{\Omega}) \text{ ristretta a } \Omega \right\}$$



\Rightarrow sono $C^0(\overline{\Omega})$ prolungabili a tutto \mathbb{R}^n in modo C^0 .

Calcolo esatto globale. Sia Ω un dominio limitato Lip di \mathbb{R}^n , oppure sia Ω un semispazio di \mathbb{R}^n . Allora $\Rightarrow D(\Omega)$ è denso in $H^1(\Omega)$.

Caso $U_n \in H^1(\Omega) \nexists \{u_n\}_{n=1}^{\infty} \in D(\Omega)$ tale che $\|u_n - u\|_{H^1(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Conseguenza: allora non ci sono $f \in H^1(\Omega)$ e $\varphi \in Lip(\Omega)$ vale $\Rightarrow \int \varphi f \in H^1(\Omega)$ e $(\varphi f)_{x_i} = \varphi_{x_i} f + \varphi f_{x_i}$. Se $\varphi f \in H^1(\Omega)$, come pensiamo che sia φ ? $\Rightarrow \varphi \in W^{1,1}(\Omega)$ e $(\varphi f)_{x_i} = \varphi_{x_i} f + \varphi f_{x_i}$ con φ su Ω e \lim_{Lip} .

Siano $\varphi, \psi \in H^1(\Omega)$, se il test di esatto globale allora $\exists \{u_n\}, \{v_n\} : u_n \xrightarrow{H^1} \varphi, v_n \xrightarrow{H^1} \psi$, allora per $\varphi \in D(\Omega)$

$$\int_{\Omega} (u_n v_n)_{x_i} dx = - \int_{\Omega} (u_n v_n)_{x_i} \varphi dx =$$

$$= - \int_{\Omega} [(u_n)_{x_i} v_n + u_n (v_n)_{x_i}] \varphi dx$$

$$\int_{\Omega} (\varphi \psi)_{x_i} dx = - \int_{\Omega} [\varphi_{x_i} \psi + \varphi \psi_{x_i}] dx$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} (\varphi \psi)_{x_i} dx = \int_{\Omega} \varphi_{x_i} \psi + \varphi \psi_{x_i} dx$$

Tracce di una $L^2(\Omega)$ su $\partial\Omega$.

Observiamo in generale il problema: data $u \in H^1(\Omega)$, che senso considerare la sua restrizione al bordo?

Per $u \in C^1(\Omega)$ certamente $u|_{\partial\Omega}$ non ha senso.

* (E-1) $\Omega = \{ (x,y) : x \in \mathbb{R}, y > 0 \}$ e $u(x,y) = \frac{1}{(x-1)^2 + y^2}$ (x,y)



Amante vale $u|_{\partial\Omega}$, cioè $u(x,0)$? $u(x,0) = \frac{1}{(x-1)^2}$ $(x) \in C^1(\mathbb{R})$

Ma... la $u \in C^1(\Omega)$ è una classe di equivalenze di $C^1(\Omega)$

$$u(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x-t)^2 + y^2} f(t) dt$$

e ora questa u è tale $u(x,0) = 0 \forall x$. Ma estrinseca nel senso usuali.

\Rightarrow la restrizione di due $C^1 = f \circ \gamma$ in \mathbb{R} non sono
 $= f \circ \gamma$ su $\partial \Omega$.

Per $\psi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ allora il calcolo di $\int \psi$ non ha
 senso.

Cosa succede invece per $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$?

\mathbb{R}_+^2 in \mathbb{R}^2 sappiamo che $f(x) = \frac{1}{|x|^{2/4}} \in H^1(B_1(0))$.

Se $\Omega = \{ (\frac{x}{z}) \in B_1(0) : z > 0 \}$ vuol dire \mathbb{R}^n (piano).

$$f(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/4}}$$

quindi restano $\int_{\partial \Omega} f$ non

$$u(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^{1/4}} \text{ definita per } x^2+y^2 > 0$$

$\psi \in C^1(B_1(0))$? $u = u(\rho) = \frac{1}{\rho^{1/2}}$, $u^2 = \frac{1}{\rho}$ e

$$\int u^2 = \int \frac{1}{\rho} \rho d\rho \text{ converge } \Rightarrow \psi \in C^1$$

Vogliamo sapere la traccia di una C^1 $H^1(\mathbb{R}^n)$ come
 elemento di $L^2(\partial \Omega)$

Cos'è $L^2(\partial \Omega)$?

- se Ω è un rettangolo, $\mathbb{R}_+^n = \{ x = \begin{pmatrix} x' \\ x_n \end{pmatrix} : x' \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n > 0 \}$
 allora $\partial \Omega = \mathbb{R}^{n-1} = \{ x = \begin{pmatrix} x' \\ 0 \end{pmatrix} : x' \in \mathbb{R}^{n-1} \}$

$$\Rightarrow L^2(\partial \Omega) = L^2(\mathbb{R}^{n-1})$$

- se Ω è un Lip , la sua frontiera localmente
 è il grafico di una C^1

$$x_n = f(x') \text{ con } x' \in \mathbb{R}^{n-1}$$

\mathbb{R} su $\partial \Omega$ abbiamo $ds = \sqrt{1 + \|Df(x')\|^2} dx'$

$$\Rightarrow L^2(\partial \Omega) = \left\{ u(x') : \int_{\partial \Omega} |u(x')|^2 \sqrt{1 + \|Df(x')\|^2} dx' < +\infty \right\}$$

Alcune tracce.

Se Ω è un Lip di \mathbb{R}^2 , esiste un rettangolo (con
 nome). Allora

$\Rightarrow \exists$ un operatore di traccia

$$\tau_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial \Omega)$$

lineare continuo, tale che:

$$\text{se } u \in C^1(\bar{\Omega}) \text{ allora } \tau_0 u = u|_{\partial \Omega}, \text{ker}(\tau_0) = H_0^1(\Omega)$$

Come la traccia su $\partial \Omega$ di una C^1 è "nulla" su
 $\partial \Omega$ nel senso di Sobolev e questo lo $C^1 \equiv 0$.
 È un rettangolo di coerenza

Conseguenza: Lemma di signe tra due C^1 . Sappiamo

$$f \in H^1(\Omega), g \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow \int_{\Omega} f g = - \int_{\Omega} f \Delta g$$

Con vediamo cosa succede se $f, g \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ e considero $\tau_0 f$.

Dim. Sia Ω dominio con $\partial\Omega$ e meno $f, g \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ allora

$$\int_{\Omega} f g_{x_i} dx = - \int_{\Omega} f_{x_i} g dx + \int_{\partial\Omega} (f g) \nu_{x_i} d\sigma$$

Dim. Siano $f, g \in \mathcal{H}^1(\Omega)$. Poiché $\tau_0 f$ e $\tau_0 g$ sono nel $L^2(\partial\Omega)$ si ha

aperte f, g regolari e below $\partial\Omega$ (cioè esse solo conoscenza del $\partial\Omega$).

$$\int_{\Omega} f (g_{x_i}) dx = - \int_{\Omega} (f_{x_i} g) dx + \int_{\partial\Omega} f g \nu_{x_i} d\sigma$$

per $h \rightarrow +\infty$ si ha: $f_h \xrightarrow{L^2} f, (g_{x_i})_h \xrightarrow{L^2} g_{x_i}$

$$\int_{\Omega} f g_{x_i} dx = - \int_{\Omega} f_{x_i} g dx + (*)$$

Per il τ_0 di traccia l'operatore $\tau_0: \mathcal{H}^1(\Omega) \rightarrow C^0(\partial\Omega)$ e' lineare continuo, quindi

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f g_{x_i} dx &= \int_{\Omega} (\tau_0 f) \nu_{x_i} \tau_0 g dx \\ &= \int_{\partial\Omega} (\tau_0 f) \nu_{x_i} \tau_0 g d\sigma \\ &= \int_{\partial\Omega} f g \nu_{x_i} d\sigma \end{aligned}$$

Tracce di tracce. Dato $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ posso considerare la traccia $\tau_0 u \in C^0(\partial\Omega)$.

Domanda, data $f \in C^0(\partial\Omega)$, \exists sempre una $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ la cui traccia sia quella f ?

Risposta: no, l'operatore a traccia ha una immagine che non e' tutto $C^0(\partial\Omega)$.

$$\text{Im}(\tau_0) \subset C^0(\partial\Omega)$$

\exists tale immagine e' definita con l'insieme

$$\{ f \in C^0(\partial\Omega) : f = \tau_0 u \text{ per qualche } u \in \mathcal{H}^1(\Omega) \} = \{ \text{tracce di } \mathcal{H}^1(\Omega) \} = \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$$

Se $f \in \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ con $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ tale che $\tau_0 u = f$ si dice un elemento di $\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

Non può essere unica naturalmente. E può mettere una norma in quello spazio:

$$\|f\|_{\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = \inf \{ \|u\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} : \tau_0 u = f \}$$

COMPLEMENTI NEGLI SPAZI DI HILBERT

Sia V uno spazio pre-Hilbertiano (cioè su con quadrato reale, normato con la norma indotta).

Def In due forma bilineare su V una Aut

$$a(\cdot, \cdot): V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

ovvero $a(u, v) \in \mathbb{R}$ per $u, v \in V$, tale che bil., lin.

$$a(\lambda u + \mu v, w) = \lambda a(u, w) + \mu a(v, w) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$a(u, \lambda v + \mu w) = \lambda a(u, v) + \mu a(u, w) \quad \forall u, v, w \in V$$

Si dice che una forma bilineare $a(u, v)$ su V è:

- simmetrica, se $a(u, v) = a(v, u)$
- continua, se $\exists M > 0: |a(u, v)| \leq M \cdot \|u\| \cdot \|v\|$
- coerciva, se $\exists \lambda > 0: a(u, u) \geq \lambda \|u\|^2$
- non negativa, se $a(u, u) \geq 0$

coerciva \Rightarrow non neg., le altre sono \perp tra loro

Es. (E1) Il prodotto scalare $\langle u, v \rangle$ è una forma bilineare.

re: Def

$$a(u, v) := \langle u, v \rangle$$

norma $\|\cdot\|$ quella
indotta dal prodotto
scalare su V

- \Rightarrow • a è simmetrica (perché lo è $\langle \cdot, \cdot \rangle$)
- a è continua (perché lo è il prodotto scalare)

$$|a(u, v)| = |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\| \quad (M=1)$$

- a è coerciva:

$$a(u, u) = \langle u, u \rangle = \|u\|^2 \quad (\lambda=1)$$

(E2) $V = H^1(a, b)$, $a(f, g) = \int_a^b (\alpha f g' + \beta f g' + \gamma f g) dx$

con $\alpha, \beta, \gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$

Le forme scelgono la norma. Come devono essere?

- Se $\alpha, \beta, \gamma \in C^0(a, b) \Rightarrow a(f, g)$ è una forma bilineare, per def, continua perché

$$|a(f, g)| \leq \|\alpha\|_{C^0} \|f\|_{L^2} \|g'\|_{L^2} + \dots \leq C \cdot \|f\|_{H^1} \cdot \|g\|_{H^1}$$

- non è simmetrica in generale, lo è se $\beta \equiv 0$.
- Se $\beta \equiv 0$, è coerciva?

$$a(f, f) = \int_a^b \alpha (f')^2 + \gamma f^2 dx$$

\Rightarrow se $\alpha(x) \geq \lambda \forall x \in (a, b)$ e $\gamma(x) \geq \lambda \forall x \in (a, b)$, allora

$$a(f, f) \geq \lambda \|f\|_{H^1}^2 \quad \text{ovvero è coerciva}$$

- Se $\beta \equiv 0$, $\alpha(x) \geq 0$ e $\gamma(x) \geq 0 \forall x \in (a, b)$ allora a è non negativa.

(E3) Forme bilineari non continue. Prendiamo $V = C^1(a, b)$

con il prodotto scalare

26/02

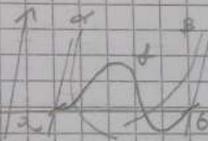
$$\langle f, g \rangle_{H^1} = \int_a^b f g + f' g'$$

$$\Rightarrow \|f\|_V = \|f\|_{H^1}$$

è la forma bilineare

$$a(f, g) = \int_a^b (\alpha f'g' + \beta fg) dx$$

con $\alpha, \beta \in L^1_{loc}(a, b)$



$a(f, g)$ è ben definita
 $\forall f, g \in C^1_0(a, b)$, ma non è continua:

$$\nexists C: \left| \int_a^b \alpha f'g' + \beta fg \right| \leq C \|f\|_{H^1} \|g\|_{H^1}$$

perché per avere $\left| \int \beta fg \right| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$

sarebbe $\beta \in L^2(a, b)$ invece continuo, con cui
 lo non era, β è solo a $L^1_{loc}(a, b)$

Prop. Sia V uno spazio vech e $a(\cdot, \cdot)$ una forma bilineare simmetrica, continua e coerciva. Allora

$$\langle u, v \rangle_a := a(u, v)$$

vale che $\langle \cdot, \cdot \rangle_a$ è un prodotto scalare, e la norma indotta

$$\|u\|_{H_a} = \sqrt{\langle u, u \rangle_a} = \sqrt{a(u, u)}$$

è una norma equivalente alla norma

$$\|u\|_H = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

quella di partenza.

Quindi cioè

quasi scalare di V
 quella classe di quello di H

$$\exists c_1, c_2: c_1 \|u\|_H \leq \|u\|_{H_a} \leq c_2 \|u\|_H$$

Dim. Stando a $\langle u, v \rangle_a = a(u, v)$.

- $\langle \cdot, \cdot \rangle_a$ è bilineare perché lo è a
- $\langle \cdot, \cdot \rangle_a$ è commutativo perché a è simmetrico
- $\langle u, u \rangle_a = a(u, u) \geq \frac{1}{c} \|u\|_H^2$

$$\Rightarrow \langle u, u \rangle_a \geq 0 \quad \forall u \quad \text{e} \quad \langle u, u \rangle_a = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

Quindi $\langle u, v \rangle_a$ è un prodotto scalare classico

$$\|u\|_{H_a} = \sqrt{\langle u, u \rangle_a}$$

Mostriamo che è una norma equivalente.

- $\|u\|_{H_a} = \sqrt{\langle u, u \rangle_a} \geq \sqrt{\frac{1}{c}} \cdot \|u\|_H$
- $\|u\|_{H_a} = \sqrt{\langle u, u \rangle_a} \leq \sqrt{c} \cdot \|u\|_H \quad \square$

Conseguenze notevoli che

$$\sqrt{\frac{1}{c}} \|u\|_H \leq \|u\|_{H_a} \leq \sqrt{c} \|u\|_H$$

con $\frac{1}{c}$ costante di coercività di $a(\cdot, \cdot)$
 c costante di continuità di $a(\cdot, \cdot)$

Cos'è utile per lavorare con:

PROBLEMA VARIAZIONALE ASTRATTO

Def. Sia H uno sp. vech e $a(\cdot, \cdot)$ una forma bilineare su H .
 Si dice problema variazionale astratto il seguente problema:

problema: dato $F \in \mathcal{H}^{\mathcal{H}}$ (F lineare lin cont su \mathcal{H})
determinare
 $m \in \mathcal{H}: a(m, v) = F(v) \quad \forall v \in \mathcal{H}$

Per questo prob o interverrà l' \exists della colla in \mathcal{H} $\forall F$ esistente
 la sua unicità! e dependente continua da m da F
 vediamo se tra le siamo ci per queste richieste

solu (ca): Sia \mathcal{H} uno sp e sia $a(\cdot, \cdot)$ una forma
 bilineare su \mathcal{H} simmetrica, continua, coerciva.

allora $\Rightarrow \forall F \in \mathcal{H}^{\mathcal{H}}$ il prob variazionale esistente di
 "determinare $m \in \mathcal{H}: a(m, v) = F(v) \quad \forall v \in \mathcal{H}$ " ha

una e una sola sol m , che richiede

$$\|m\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{\alpha} \|F\|_{\mathcal{H}^{\mathcal{H}}}$$

dove α è la costante di coercività di $a(m, v)$.

Dim. Poiché $a(m, v)$ è bilineare, sim, continua, coerciva
 allora per la proprietà precedente

$$\langle m, v \rangle_a := a(m, v)$$

è un prod scalare e, questa $\|m\|_a = \sqrt{a(m, m)}$, risulta

$$\sqrt{\alpha} \|m\|_{\mathcal{H}} \leq \|m\|_a \leq \sqrt{\alpha} \|m\|_{\mathcal{H}}$$

Sia $F \in \mathcal{H}^{\mathcal{H}}$. Dico: nella stessa sp genero due
forme diverse ma equivalenti.

È allora \exists (lin e) continua rispetto alle $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$. Mostriamo
 che lo è anche per $\|\cdot\|_a$.

$$F: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \text{ lin e cont: } |F(v)| \leq \|F\|_{\mathcal{H}^{\mathcal{H}}} \cdot \|v\|_{\mathcal{H}} \leq \|F\|_{\mathcal{H}^{\mathcal{H}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \|v\|_a$$

$$\|F\|_{\mathcal{H}^{\mathcal{H}}} = \sup \left(\frac{|F(v)|}{\|v\|_{\mathcal{H}}} \right) \leq \|F\|_{\mathcal{H}^{\mathcal{H}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

\Rightarrow Quindi F è lin e cont. anche rispetto alle $\|\cdot\|_a$, e

$$\|F\|_{\mathcal{H}^{\mathcal{H}}} \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \|F\|_{\mathcal{H}^{\mathcal{H}}}$$

Per il flu di rappresentazione di Riesz $\exists!$ $m \in \mathcal{H}$:

$$\langle m, v \rangle_a = F(v) \quad \forall v \in \mathcal{H}$$

$$\Leftrightarrow a(m, v) = F(v)$$

in questo caso la sol
 da la m , una volta
 che abbiamo costruito
 $a(m, v)$ nel prod
 scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_a$

Quindi $\exists!$ la sol del pva. È notevole che

$$\|m\|_a = \|F\|_{\mathcal{H}^{\mathcal{H}}} \leq \|F\|_{\mathcal{H}^{\mathcal{H}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

$$\geq \sqrt{\alpha} \|m\|_{\mathcal{H}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\alpha} \|m\|_{\mathcal{H}} \leq \|F\|_{\mathcal{H}^{\mathcal{H}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

$$\|m\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{\alpha} \|F\|_{\mathcal{H}^{\mathcal{H}}}$$

□

solu. Sia \mathcal{H} uno sp e $a(\cdot, \cdot)$ una forma bilineare, sim-
metrica - non-negativa.

allora \Rightarrow dato $F \in \mathcal{H}^{\mathcal{H}}$
 "a(m, v) = F(v) $\forall v \in \mathcal{H}$ " ha che $m \in \mathcal{H}$ esiste il pva

(\Leftarrow) in reverse nonno il funzionale

$$J(u) = \frac{1}{2} a(u, u) - F(u)$$

ove $J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in H$.

\Rightarrow un funzionale (non nec lineare, anzi rendere quadrato), che $\forall v \mapsto \in \mathbb{R}$.

Σ_1 ($\in \Sigma$) $a(u, v) = \int_a^b \alpha(x) u'(x) v'(x) dx + \tau(u, v)$, $\alpha, \tau \in C^\infty(a, b)$, $\alpha \geq 0$, $H \times H = H \times H_2, b)$

allora $a(\cdot, \cdot)$ e bilineare, non-neg (o conv)

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_a^b [\alpha(x) (u'(x))^2 + \tau(x) (u(x))^2] dx - F(u)$$

anche J e un funzionale non lineare.

minimo il chi due || "in reverse upb A" (\Leftarrow) "in reverse upb B"

Desm in reverse nonno il funzionale (\Rightarrow) $J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in H$.

Scrittore con: $J(u+\epsilon v) = J(u) + \epsilon \{ a(u, v) - F(v) \} + \frac{\epsilon^2}{2} a(v, v)$ $J(u+\epsilon) \geq J(u)$ \Rightarrow $\epsilon \{ a(u, v) - F(v) \} + \frac{\epsilon^2}{2} a(v, v) \geq 0$ $\forall \epsilon \in \mathbb{R}$ $\forall v \in H$

$$\Leftrightarrow J(u + \epsilon v) - J(u) \geq 0 \quad \forall v \in H \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R}$$

piccola variazione / spostamento di u

Cercare o meno di un funzionale calcolando piccole variazioni del funzionale e un'idea classica, che in questo il nome di calcolo delle variazioni.

Standard (area di "cerca in minima dei funzionali")

$$\begin{aligned} J(u + \epsilon v) - J(u) &= \\ &= \frac{1}{2} a(u + \epsilon v, u + \epsilon v) - F(u + \epsilon v) - \left[\frac{1}{2} a(u, u) - F(u) \right] = \text{bilineare} \\ &= \frac{1}{2} [\cancel{a(u, u)} + \epsilon a(u, v) + \epsilon a(v, u) + \epsilon^2 a(v, v)] + \\ &\quad - \cancel{F(u)} - \epsilon F(v) - \left[\frac{1}{2} \cancel{a(u, u)} - \cancel{F(u)} \right] = \\ &= \epsilon a(u, v) + \frac{1}{2} \epsilon^2 a(v, v) - \epsilon F(v) = \\ &= \epsilon \{ a(u, v) - F(v) \} + \frac{1}{2} \epsilon^2 a(v, v) = A \end{aligned}$$

Quindi in minimo (\Rightarrow) $\forall v \in H$ e $\forall \epsilon \in \mathbb{R}$ $A \geq 0$

$$A = \epsilon (a(u, v) - F(v)) + \frac{1}{2} \epsilon^2 a(v, v) \geq 0$$

Se in minimo pre $a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H$ allora

$$A = \epsilon (0) + \frac{1}{2} \epsilon^2 a(v, v) \geq 0 \text{ perche } a \text{ non-negativa}$$

Quindi $A \geq 0$ e in minimo il funzionale.

Se in minimo il funzionale allora $\forall v \in H \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R}$ vale

$$\epsilon \{ a(u, v) - F(v) \} + \frac{1}{2} \epsilon^2 a(v, v) \geq 0$$

per v costante, valore den $\{ B \} = 0$. Per altro, non lo no, no!

$$B = a(u, v) - F(v) \neq 0$$

Per $\{E\}$ e il resto di quella norma e il resto di

$$\{B\} = \{ \alpha(u, v) - F(v) \}$$

Se scegliamo $\alpha(u, v) = \int \nabla u \cdot \nabla v$ e $F(v) = \int f v$, invece di avere $\alpha(u, v) = \int \nabla u \cdot \nabla v$ e $F(v) = \int f v$ si ha $\alpha(u, v) = \int \nabla u \cdot \nabla v$ e $F(v) = \int f v$

$\Rightarrow \forall v \in H$ $B=0$

cioè $\alpha(u, v) = F(v) \Rightarrow$ in qualche il problema

APPLICAZIONI ALLA FORMULAZIONE DEBOLE DI PROBLEMI AL LIMITI PER ELETTRICITÀ

Consideriamo

$$-\nabla \cdot (\alpha(x) \nabla u(x)) + d(x) u(x) = f(x)$$

che potrebbe essere il caso di un problema di diffusione e reazione in un mezzo non omogeneo (con $\alpha = 1$ e $d = \mu$).

Assumiamo $\alpha \in C^0(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dominio limitato e la costante di diffusione ellittica α

$$\alpha(x) \geq \alpha_0 > 0 \quad \forall x \in \Omega$$

$$d(x) \geq 0$$

mentre quella nulla è il caso per i materiali omogenei. f è la carica presente.

Condizione di Dirichlet omogenea

$$u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega$$

Ritorniamo ora indietro. Vedremo come una def di problema debole del problema

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

che all'incirca si può prendere $\alpha \in C^0$ "solo" C^0 . Anche assumendo come di solito e una convoluzione integrale.

Supponiamo prima che sia $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, $\alpha \in C^1(\bar{\Omega})$, $d \in C^0(\bar{\Omega})$, $f \in C^0(\bar{\Omega})$, cioè tutto va bene.

E supponiamo in via da allora che $\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$

Se $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ lo usiamo come test, e φ estremo o nullo e per \int in Ω .

$$\int_{\Omega} -\nabla \cdot (\alpha \nabla u) \varphi + d u \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx$$

$$\nabla \cdot (\alpha \varphi \nabla u) = \varphi \nabla \cdot (\alpha \nabla u) + \alpha \nabla \varphi \cdot \nabla u$$

\Rightarrow possiamo avere

$$-\int_{\Omega} \nabla \cdot (\alpha \varphi \nabla u) + \int_{\Omega} \alpha \nabla \varphi \cdot \nabla u + \dots = \dots$$

$$= -\int_{\partial\Omega} \alpha \varphi \nabla u \cdot \nu \, d\sigma$$

ma $\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \Rightarrow \varphi|_{\partial\Omega} = 0$

e grazie quindi

$$\int_{\Omega} \alpha \nabla \varphi \cdot \nabla u + \int_{\Omega} d u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi$$

$$\int_{\Omega} (e \nabla u \cdot \nabla \varphi + d u \varphi) dx = \int_{\Omega} (f \varphi) dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Quali sono le eq. rimaste sotto cui ha senso questa scrittura integrale?

compone ∇u e $\nabla \varphi \Rightarrow$ ragioniamo $u, \varphi \in H^1$ con la loro
 densità $(\nabla \cdot)$ sono L^2
 E il resto della cc suggerisce $u \in H^1$

Def. Si dice che u è ris. debole di

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

dove $f \in L^2(\Omega)$, $a \in L^\infty(\Omega)$, $d \in L^\infty(\Omega)$ e

(1) $u \in H_0^1(\Omega)$ \Rightarrow richiesta che espone più che in
 risolvibile la cc "0 su $\partial\Omega$ "

(2) vale

$$\int_{\Omega} (e \nabla u \cdot \nabla \varphi + d u \varphi) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

• abbiamo ora che se u è ris. classica allora pratica
 vale $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, e limita allora vale $\forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$.

• E abbiamo ora che se u è ris. classica del prob,
 cioè u, f, d , e sono risolvibili, allora u è anche
ris. debole.

E in viceversa vale, cioè?

Mostriamo che se u è ris. debole dell'eq, ma u, f, d
 o, d sono risolvibili, allora u è anche ris. classica
 dell'eq.

$$\int_{\Omega} (e \nabla u \cdot \nabla \varphi + d u \varphi) = \int_{\Omega} f \varphi$$

mostriamo la co. f e
 l'equazione \Rightarrow prova di
 all'indietro

$$\int_{\Omega} (e \nabla u \cdot \nabla \varphi) dx = \int_{\Omega} \nabla \cdot (e \nabla u) \varphi + \int_{\partial\Omega} e \nabla u \cdot \varphi \nu dx$$

perché
 $\varphi = 0$ su $\partial\Omega$ ($\varphi \in C_0^\infty$)

$$\Rightarrow \int_{\Omega} [-\nabla \cdot (e \nabla u) + d u - f] \varphi dx = 0$$

la continua, $C_0^\infty(\Omega)$

ha qualunque

che di
 annullamento
 dell'

$$\Rightarrow -\nabla \cdot (e \nabla u) + d u = f \text{ in } \Omega$$

$\Rightarrow u$ è ris. classica dell'eq \square

Mostriamo ora che in tal caso di esistenza e unicità,
 possiamo relazionare il prob. di Dirichlet in forme debole
con proble.

- $\text{ris. } H = H_0^1(\Omega)$ \Rightarrow φ della formulazione debole
- forma bilineare: $a(u, v) = \int_{\Omega} (e \nabla u \cdot \nabla v + d u v) dx$
- $F \in H^0$: $F(u) = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx$

$$|F(u)| \leq \|f\|_2 \|u\|_2 \leq \|f\|_2 \|u\|_{H^1}$$

Dato $f \in L^2(\Omega)$ trovare $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Se mostriamo che la forma bilineare è simmetrica e continua in $H_0^1(\Omega)$ allora il problema è ben posto.

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \epsilon \nabla u \cdot \nabla v + d(x) u v \, dx$$

se $a \in C^0(\Omega)$ e $d \in L^{\infty}(\Omega)$ allora

$$|a(u, v)| \leq \|a\|_{C^0} \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} + \|d\|_{L^{\infty}} \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq (\|a\|_{C^0} + \|d\|_{L^{\infty}}) \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$$

perciò $a(\cdot, \cdot)$ è una forma bilineare ben definita e continua in $H_0^1(\Omega)$.

È anche simmetrica, $a(u, v) = a(v, u)$.
 È coerciva.

$$a(u, u) = \int_{\Omega} \epsilon |\nabla u|^2 + d(x) u^2 \, dx$$

per mostrare che sup:

* $\epsilon(x) \geq \epsilon_0 > 0$
 * $d(x) \geq 0$

allora $a(u, u) = \int_{\Omega} \epsilon |\nabla u|^2 + d(x) u^2 \, dx \geq \int_{\Omega} \epsilon_0 |\nabla u|^2 \, dx$

Per la disuguaglianza di Poincaré $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \geq \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$

Perché: $\forall u \in H_0^1(\Omega) \quad \|u\|_{L^2}^2 \leq C_{\Omega}^2 \|\nabla u\|_{L^2}^2$

$$\Rightarrow \|u\|_{H^1}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq$$

$$\leq (C_{\Omega}^2 + 1) \|\nabla u\|_{L^2}^2$$

$$\|u\|_{H^1} \leq \sqrt{C_{\Omega}^2 + 1} \|\nabla u\|_{L^2}$$

$$a(u, u) \geq \epsilon_0 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx = \epsilon_0 \|\nabla u\|_{L^2}^2 \geq \frac{\epsilon_0}{1 + C_{\Omega}^2} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2$$

Se $a(x)$ è coerciva in $H_0^1(\Omega)$, quale è il problema ben posto (per il lemma di Lax-Milgram).

allora allora si

Def. Sia Ω dominio limitato di \mathbb{R}^n , sia $a(x) \in C^0(\Omega)$, $d(x) \in L^{\infty}(\Omega)$, $d(x) \geq 0$, $a(x) \geq \epsilon_0 > 0$.

allora $\forall f \in L^2(\Omega)$ $\exists!$ $u \in H_0^1(\Omega)$ che risolve di

$$\begin{cases} -\Delta u + d(x)u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

ove ϵ tale che

$$\int_{\Omega} \epsilon \nabla u \cdot \nabla \varphi + d(x) u \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

Inoltre vale la stima coerciva:

$$\|u\|_{H^1} \leq \frac{1 + C_{\Omega}^2}{\epsilon_0} \|f\|_{L^2}$$

È per la teoria inter, la ris soluzione u è anche il minimo

il nuovo del funzionale

$$J(u) = \frac{1}{2} a(u, u) - F(u) =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x) \|\nabla u\|^2 + d(x) u^2 - 2f(x) u \, dx$$

Caso $J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in H^1_0(\Omega)$.

Ma in questo caso, $J(u)$ rappresenta (una piccola) energia nel sistema.

Costruire di nuovo il problema, per la stessa eq.

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a \nabla u) + d u = f & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial \Omega \end{cases}$$

Supponiamo prima che $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, e, d, f sono regolari, Ω è liscio, $\partial \Omega$ è Lipschitz (e tale $d(x)$); cioè tutto va bene. E che u sia una soluzione del problema.

Come prima, moltiplichiamo per $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$ e integriamo.

$$\int_{\Omega} -\operatorname{div}(a \nabla u) \varphi + d u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi$$

$$= \int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx - \int_{\partial \Omega} a \nabla u \cdot \nu \varphi \, d\sigma$$

$$= \int_{\Omega} a \varphi \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\sigma$$

ora come prima
risultato è 0

$$\Rightarrow \int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla \varphi + d u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi \quad \forall \varphi \in C^1(\bar{\Omega})$$

E viceversa per densità (o $C^2(\bar{\Omega})$) ad avere $\forall \varphi \in H^1_0(\Omega)$

Def. Dico che u è soluzione debole di

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a \nabla u) + d u = f & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial \Omega \end{cases}$$

dove Ω dominio liscio e \mathbb{R}^n , $f \in L^2$, $a, d \in C^0$ e

(1) $u \in H^1_0(\Omega)$ \leadsto soluzione nel senso $u=0$ on $\partial \Omega$

(2) vale

$$\int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla \varphi + d u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi \quad \forall \varphi \in H^1_0(\Omega) \quad (*)$$

Quindi $\bar{\Omega}$ deve essere punto ma contiene solo la massima energia:
una H^1_0 e una H^1 solo.

Supponiamo che Ω sia liscio e Lipschitz, u sia soluzione debole del problema di Neumann sopra, e sia tutto regolare: $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, $a \in C^1(\bar{\Omega})$, $d, f \in C^0(\bar{\Omega})$.

Lo che la (*) è vera $\forall \varphi \in H^1_0(\Omega)$, quindi u , ricalcolando il funzionale per $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$.

Integrando per parti nella (*) allora troviamo (essendo $\varphi \equiv 0$ on $\partial \Omega$)

$$\int_{\Omega} [-v \cdot (a \nabla u) + du - f] \varphi \, dx = 0$$

$\in C^0(\bar{\Omega})$
per la scelta di φ

$$\Rightarrow -v \cdot (a \nabla u) + du = f \quad \text{in } \Omega, \quad \text{con } u = 0 \text{ su } \partial\Omega$$

classica delle eq

Ma se $du = 0$ in Ω , una summa la \neq $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$ e integrando per parti. Restano condizioni a retrocedere sui contorni di Ω .

$$\int_{\Omega} (-v \cdot (a \nabla u) + du) \varphi - \int_{\Omega} a \varphi \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\sigma = \int_{\Omega} f \varphi \, dx$$

quello in rimane e eq in non classica ovvero

$$\int_{\Omega} \left(a \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \varphi \, d\sigma = 0$$

$\in C^1(\partial\Omega)$
per scelta $\in C^1(\bar{\Omega})$

$$\Rightarrow a \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{su } \partial\Omega, \quad \text{ma } a(x) \geq \gamma > 0 \Rightarrow a(x) \neq 0 \text{ su } \partial\Omega$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{su } \partial\Omega \Rightarrow u \text{ è } \text{c.c.} \text{ r.l.t. } \text{classica} \quad \square$$

Quindi non nessa il vero, la u è debole e è classica, se le voie u, a, d, f non risolvono pb.

Per provare che il problema è ben posto, significando come pra

\cdot sb: $H = H^1(\Omega) \Rightarrow$ non de, nessa della dis di bilanci, che valore su $H^1(\Omega)$
 \cdot forma bilanci: $a(u, v) = \int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla v + duv \, dx$
Nota $f \in L^2(\Omega)$, trovare $u \in H^1(\Omega)$ tale che
 $a(u, v) = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H^1(\Omega)$

La forma bilanci è ben posta e catena re $a, d \in L^\infty$

$$|a(u, v)| \leq \|a\|_{\infty} \|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2 + \|d\|_{\infty} \|u\|_2 \|v\|_2$$

$$\leq (\|a\|_{\infty} + \|d\|_{\infty}) \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$$

Per $a(u, v)$ è simmetrica per che è scrittura è coerciva

$$a(u, u) = \int_{\Omega} a(x) \|\nabla u\|^2 \, dx + \int_{\Omega} d u^2 \, dx \geq$$

Se $a(x) \geq \gamma > 0$ (costante di inf alt) allora

$$\geq \gamma \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 \, dx + \int_{\Omega} d u^2 \, dx \geq$$

Per d ? Supponiamo che $d(x) \geq c_0 > 0$, allora

$$\geq \gamma \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 \, dx + c_0 \int_{\Omega} u^2 \, dx \geq$$

$$\geq \min(\gamma, c_0) \cdot \left[\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2 \right]$$

$\|u\|_{H^1}^2$

Teor. Sia Ω dom. b.c. Lips di \mathbb{R}^n , mosto $a, d \in C^0(\Omega)$,
 $a(x) \geq \alpha > 0$ e $d(x) \geq c_0 > 0$.

Allora \Rightarrow $\forall f \in C^0(\Omega) \exists!$ $u \in H^1(\Omega)$ r.l.s. debole del
 problema di Neuman

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a \nabla u) + du = f & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

è vale la disuguaglianza continua

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\min(\alpha, c_0)} \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

noteremo che se $d \equiv 0$ il t.l.u. non ha senso. Ma
 infatti se $d \equiv 0$ l'eq. diventa:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a \nabla u) = f & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

la u compare solo nel termine $\int \nabla u \cdot \nabla u$ e quindi
 la r.l.s. del qual non può essere vera:

$$u \text{ r.l.s.} \Rightarrow u + C \text{ ancora r.l.s. (CER)}$$

Se $d \equiv 0$ e u è r.l.s. debole, allora

$$\int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_{\Omega} f \varphi \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega)$$

in particolare per $\varphi \equiv 1$ (che è ammissibile) troviamo

$$\int_{\Omega} f(x) dx = 0$$

che è garantito (se $d \equiv 0$)
 condizione di compatibilità

Senza questa condizione di compatibilità non \exists di
 r.l.s.

Quindi con $d \equiv 0$ cade l'! della r.l.s. u , e $\exists \nabla u$. //

Comunque, se pur non con altre ipotesi che con le lip
 precedenti e $d \equiv 0$, allora

$$\text{la r.l.s. del problema} \exists \Leftrightarrow \int_{\Omega} f(x) dx = 0$$

e in tal caso è unica
 e nuovo di costanti addizionali.

Passiamo alle lip del t.l.u. di existence. Poiché la
 forma bilineare è simmetrica e non-negativa,

allora la r.l.s. debole del qual di Neuman è' anche la
 in che rende minimo il funzionale

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x) \|\nabla u\|^2 + d(x) u^2 dx - \int_{\Omega} f u$$

il minimo di $u \in H^1(\Omega)$.

Consideriamo ora un operatore ellittico più generale,
 del tipo:

$$Lu = -\operatorname{div}(A(x) \nabla u) + c(x) \cdot \nabla u + d(x) u$$

$$= -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{k=1}^n c_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + d(x) u$$

con la matrice $A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(x) & \dots & a_{mn}(x) \end{pmatrix}$ $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \lambda \|\xi\|^2$ simmetrica e definita positiva in R .

con $\lambda > 0$ (costante o ellittica). \exists $\text{supp } a_{ij}, c_h, d \in C^0(\Omega)$ e $f \in C^2(\Omega)$.

Calcolo di $L_m = f$ $\left. \begin{matrix} m=0 \\ m=1 \end{matrix} \right\} / \Omega$

Sia Ω un dominio in R^n , $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, $a_{ij} \in C^1(\Omega)$, $c_h, d \in C^0(\Omega)$, $f \in C^0(\Omega)$.

Proviamo $L_m = f$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e per λ .

$$\int_{\Omega} (L_m)\varphi = \int_{\Omega} f\varphi$$

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij}(x) u_{x_i} \varphi_{x_j} + \sum_h c_h u_{x_h} \varphi + d u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi$$

vale $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ da cui si deduce $\forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Def. Si dice che m è relazione di $\left. \begin{matrix} L_m = f \\ m=0 \end{matrix} \right\} / \Omega$

se (Ω) $u \in H_0^1(\Omega)$

(2) vale

$$a(u, \varphi) = \int_{\Omega} f \varphi \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

$$\text{dove } a(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_h c_h u_{x_h} v + d u v$$

• Osservare che a non è qui simmetrica (però nella parte \mathcal{E}_h)

• Se $a_{ij} \in C^0$, $c_h, d \in C^0$ la forma bilineare a è ancora bil. definita e continua su $H_0^1(\Omega)$.

Per costruire la forma quadratica del problema ci vuole un t.c.m. estremo almeno (nel senso della simmetria).

Def. (di Lax-Milgram)

non serve più "a simmetria" come nel primo t.c.m. visto

Sia H uno sp. vett. reale $a(u, v)$ una forma bilineare su H continua e coerciva.

allora $\Rightarrow \forall F \in H' \exists!$ rel. $u \in H$ del pro

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H$$

Inoltre, vale la stima di dipendenza continua

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{\alpha} \|F\|_{H'}$$

stessa stima del paragrafo t.c.m. \Rightarrow come enunciato si =, anche solo la simmetria

con α la costante di coercività ($a(u, u) \geq \alpha \|u\|_H^2$)

Dim. Proviamo anche $a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H$ (F dato).

$\forall u \in H$ e nota, consideriamo il funzionale $T_u: v \mapsto a(u, v)$
 $T: H \rightarrow R$

• T_u è lineare perché $a(u, \cdot)$ è lineare
 • T_u è continuo perché

$$|T_u v| = |a(u, v)| \leq M \cdot \|u\|_H \cdot \|v\|_H$$

$\text{range}(A) = \{ Tu \in H^* \mid \|Tu\|_{H^*} \leq M \cdot \|u\|_H = c \|u\|_H \}$

$\exists! \tilde{A}u \in H : Tu \vee = \langle \tilde{A}u, v \rangle \quad \forall v \in H$

Corollario: esiste un'operatore $A: H \rightarrow H$ tale che

$\langle \tilde{A}u, v \rangle = a(u, v)$

$\tilde{A}u$: matrice A applicata al vettore u

È verificato dal teorema di Riesz

$\|\tilde{A}u\|_H = \|Tu\|_{H^*} \leq M \cdot \|u\|_H$

Esistono il teorema di Riesz su $F \in H^*$:

$\exists! f \in H : F(v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H$

$\|f\|_H = \|F\|_{H^*}$

dal problema si risolve un vettore lineare

Il problema "trovare un tale che $a(u, v) = F(v)$ " diventa "trovare un tale che $\langle \tilde{A}u, v \rangle = \langle f, v \rangle$ ", $\forall v \in H$.

Ma allora "trovare un tale che $\tilde{A}u = f$ ", che è un eq. di compatibilità $A: H \rightarrow H$.

quindi, esista $f \in H$ non vuol dire $\exists u : Au = f$.

Ma, per il teorema, ne esiste sempre uno

$\forall f \in H \exists! u \in H \text{ tale che } Au = f, \|u\|_H \leq c \|f\|_H = c \|F\|_{H^*}$

Domanda: l'operatore A

- (1) è lineare e continuo
- (2) è invertibile e suriettivo
- (3) detto R il suo operatore inverso, R è continuo, cioè

$$\|Rf\| \leq c \|f\|$$

Cosa rappresenta intuitivamente?

- def di A : $\langle Au, v \rangle = a(u, v)$
- def di $\|Au\|_H = M \|u\|_H$

(1) dim che A è lineare: $\forall v \in H$

$$\begin{aligned} \langle A(\alpha u_1 + \beta u_2), v \rangle &= a(\alpha u_1 + \beta u_2, v) = \alpha a(u_1, v) + \beta a(u_2, v) \\ &= \alpha \langle Au_1, v \rangle + \beta \langle Au_2, v \rangle = \langle \alpha Au_1 + \beta Au_2, v \rangle \end{aligned}$$

$\langle u, v \rangle = \langle w, v \rangle \quad \forall v \Rightarrow \langle u-w, v \rangle = 0 \quad \forall v \Rightarrow u-w=0 \Rightarrow u=w$

e dalla dimostrazione sopra si ha $u=w$ e continuo

(2) $\langle \tilde{A}u, v \rangle = a(u, v)$

per $v=u$ otteniamo

$\langle \tilde{A}u, u \rangle = a(u, u) \geq \gamma \|u\|^2$

$\|Au\| \cdot \|u\| \geq \gamma \|u\|^2$

$\Rightarrow \|Au\| \geq \gamma \|u\|$

$Au=0 \Rightarrow u=0$ cioè A è invertibile

allora dim che $\gamma \|u\| \leq \|Au\| \leq M \|u\|$.

Dimostrare che A è invertibile, cioè che $\text{range}(A) = H$.

Cioè:

$$\text{range}(A) = \{ y: y = Ax, x \in H \} := R(A)$$

mostre che $\{ y_n \} \subseteq R(A)$ tale che $y_n \rightarrow y \in H$, in
 risulta $y \in R(A)$. Ora:

$$y_n \in R(A) \Rightarrow y_n = Ax_n \text{ per qualche } x_n$$

Prendiamo che la succ $\{ x_n \}$ è di Cauchy in H , cioè

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\| &\xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0 \\ \|x_n - x_m\| &= \frac{1}{\alpha} \|A(x_n - x_m)\| = \\ &= \frac{1}{\alpha} \|Ax_n - Ax_m\| = \\ &= \frac{1}{\alpha} \|y_n - y_m\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

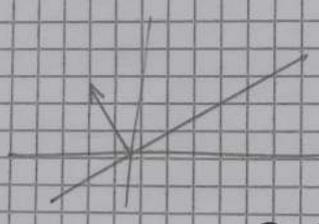
perché $\{ y_n \}$ è l.p. e di
 Cauchy e quindi convergente

$\Rightarrow \{ x_n \}$ è di Cauchy, H è completo
 $\Rightarrow \exists x \in H: x_n \rightarrow x$, ma A è continuo

$$\begin{aligned} \Rightarrow Ax_n &\rightarrow Ax & \Rightarrow Ax = y \text{ (ma allora } y \in R(A)) \\ y_n &\rightarrow y & \Rightarrow y \in R(A) \\ & & \Rightarrow R(A) \text{ è chiuso} \end{aligned}$$

Ora $R(A)$ è un s.v. chiuso di H . Vogliamo dire che
 $R(A) = H$ proprio (da cui A suriettivo).

Per questo, sia $R(A) \subsetneq H$ (cioè esiste z ma è uguale).
 Per il collinare del t.l.m. delle proiezioni:



$$\exists z \perp R(A), z \neq 0$$

$$\text{ovvero } \langle z, Ax \rangle = 0 \quad \forall x \in H$$

se prendiamo $x = z$ segue
 $\langle z, Az \rangle = 0$, ma

$$0 = \langle z, Az \rangle = \alpha \langle z, z \rangle \geq \alpha \|z\|^2 \text{ perché } \alpha > 0$$

$$\Rightarrow z = 0 \text{ ma contraddizione } \Rightarrow z = 0 \Rightarrow R(A) = H$$

Ora $A: H \rightarrow H$ è un certo suriettivo unitario.

data $f \in H$: $Am = f$ t.l.m. di Cauchy?

è la densità continua? In che

$$\|m\| \leq \|Am\| = \|f\|$$

$$\|m\| = \frac{1}{\alpha} \|f\| = \frac{1}{\alpha} \|f\|_{H}$$

□

Problema di Dirichlet

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Sia Ω regione limitata.

Il problema si risolve $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$a(u, \varphi) = \int_{\Omega} f \varphi \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

Allora vale che

$$a(u, v) = \sum_{i,j=1}^n \int \alpha_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{k=1}^n \int c_k u_{x_k} v + \int d u v$$

il forma bilineare coerente se $\alpha_{ij}, c_k, d \in L^\infty$.
 Moreover a è coerente.

$$|a(u, v)| \leq C \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$$

$$a(u, u) = \sum_{i,j=1}^n \int \alpha_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + \sum_{k=1}^n \int c_k u_{x_k} u + \int d u^2 \geq$$

$$\geq \lambda \int |Du|^2 + \sum_{k=1}^n \int c_k u_{x_k} u$$

dall'inf. alternativa

$$\left| \sum_{k=1}^n \int c_k u_{x_k} u \right| \leq \sum_{k=1}^n \int |c_k u_{x_k} u| \leq$$

$$\int |c_k| |Du| |u| \leq \|c_k\|_{L^\infty} \|Du\|_2 \|u\|_2 \leq$$

$$\|c_k\|_{L^\infty} \|Du\|_2^2 C_n$$

$$\Rightarrow a(u, u) \geq \lambda \|Du\|_2^2 - \|c_k\|_{L^\infty} C_n \|Du\|_2^2 =$$

$$= (\lambda - \|c_k\|_{L^\infty} C_n) \|Du\|_2^2 \geq 0 \|u\|_{H^1}^2$$

però vedere che questo sia $> 0!$
 per la coercività

$\lambda > 0, C_n > 0 \Rightarrow$ rende ||S||_{op} piccolo. Caso:

$$\text{se } \|c_k\|_{L^\infty} \leq \frac{\lambda}{2C_n} \text{ allora } \lambda - \|c_k\|_{L^\infty} C_n \geq \frac{\lambda}{2} := c$$

Alm. Sia Ω dom. limitato, consideriamo il problema

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^n (\alpha_{ij} u_{x_i})_{x_j} + \sum_{k=1}^n c_k u_{x_k} + d u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

dove $\alpha_{ij}, c_k, d \in L^\infty(\Omega), f \in L^2(\Omega)$,

- $\sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} \xi_i \xi_j \geq \lambda \|\xi\|^2 \quad \lambda > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad \xi \neq 0$ (unif. ell.)
- $d(x) \geq 0 \quad \forall x$
- $\|c_k\|_{L^\infty} \leq \frac{\lambda}{2C_n}$

allora $\Rightarrow \forall f \in L^2(\Omega) \exists! u \in H_0^1(\Omega)$ sol. debole del problema, e

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

con un'altra tecnica (dell'alternativa) si prova a trovare questa ||S||_{op} "stima"

Come, con successo se il det. di Laplace non è 0?
 Qual'è il meccanismo? Analizziamo

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \Rightarrow \text{ha una traccia sul bordo}$$

Consideriamo e pensiamo che il det. di Laplace sia una $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Con qualche allora $u = g$ su $\partial\Omega$?

vuel dire: $u \in H^1(\Omega), g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega), u - g \in H_0^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

anche (vale) per $v = u - g$. E cerchiamo allora

$$v \in H_0^1(\Omega) : Lv = Lu - Lg = f - Lg$$

chi è Lg ? $g \in H^1$, con calcolo

$$Lg = -\sum_{i,j} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i \frac{\partial g}{\partial x_i} + g =$$

$$= -\sum_{i,j} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} + f_0 \quad \text{con } f_i \in L^2(\Omega)$$

$$\Rightarrow Lg \in H^{-2}(\Omega)$$

Quindi il nuovo problema è risolvere un problema del tipo:

dato $T \in H^{-2}(\Omega)$ trovare $v \in H_0^1(\Omega)$ tale che $Lv = T$ in senso debole.

La sol. del problema appena trovato

$$u = v + g$$

e la stima di dipendenza continua sarà

$$\|u\|_{H^1} \leq \|v\|_{H^1} + \|g\|_{H^1} \leq$$

$$C \|T\|_{H^{-2}} + \|g\|_{H^1} \leq$$

$$C [\|g\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^1(\Omega)}]$$

$$\begin{cases} Lu = f / \Omega \\ u = g / \partial \Omega \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} Lv = T / \Omega \\ v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad 03/06$$

Se $T = -\sum_{i,j} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} + f_0$, $f_i \in L^2(\Omega)$ allora valere che

$$\|T\|_{H^{-2}} \leq \sum_{i=0}^m \|f_i\|_{L^2(\Omega)} \leq$$

restano di non grande valore su

$$\leq C \cdot [\|g\|_{H^1(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)}]$$

che dipendono dai coeff

però viene $f - Lg$

In definitiva, per $\begin{cases} Lu = f / \Omega \\ u = g / \partial \Omega \end{cases}$ con $f \in L^2$, $g \in H^1$ dipende $v = u - g$ e pertanto

$$\begin{cases} Lv = T / \Omega \\ v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \text{ con } T \in H^{-2}(\Omega) \text{ e } \|T\|_{H^{-2}} \leq C[\|g\|_{H^1} + \|g\|_{L^2}]$$

Alc. nelle stesse eq del tipo precedente sui coeff anzi, con

$$\forall f \in L^2(\Omega) \quad \exists! u \in H^1(\Omega) : \begin{cases} Lu = f \\ u - g \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

e in aggiunta la stima di dipendenza continua

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \{ \|f\|_{L^2} + \|g\|_{H^1} \}$$

Se sia f e una forma scalare definita solo su Ω e $\in H^{1/2}(\Omega)$,
 sia allora \tilde{f} una funzione $\in C^1(\Omega)$ tale che

$$\tau_0(\tilde{f}) = f$$

Data questa \tilde{f} possiamo trovare $u \in H^1$ tale che

$$\begin{cases} Lu = f \\ u - \tilde{f} \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

se calcoliamo $\tau_0(u - \tilde{f}) = 0$ (vale) e $\in H_0^1$ hanno
 tracce nulle

$$\Rightarrow \tau_0(u) = \tau_0(\tilde{f}) = f$$

$$\Rightarrow \exists u \in H^1(\Omega) : \begin{cases} Lu = f \\ \tau_0(u) = f \end{cases} \Big|_{\Omega}$$

e vale la stessa (ciclico)

$$\|u\|_{H^1} \leq C \{ \|f\|_{L^2} + \|\tilde{f}\|_{H^1} \}$$

$$\|f\|_{H^{1/2}(\Omega)} = \sup \{ \|\tilde{f}\|_{H^1(\Omega)} : \tau_0 \tilde{f} = f \}$$

però passando all'inf nulla verso trovare

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1} &\leq \inf (C \{ \cdot \}) = \\ &= C \{ \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{H^{1/2}(\Omega)} \} \end{aligned}$$

Se $u_1, u_2 \in H^1(\Omega)$ sono rel di

$$\begin{cases} Lu_1 = f \\ u_1 - \tilde{f}_1 \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad \begin{cases} Lu_2 = f \\ u_2 - \tilde{f}_2 \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

dove $\tau_0 \tilde{f}_1 = \tau_0 \tilde{f}_2 = f$ (hanno la stessa traccia), allora

$$u = u_1 - u_2 \quad \begin{cases} Lu = 0 \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (*)$$

E poiché il nullone (*) ha u una rel allora

$$u = 0 \Rightarrow u_1 = u_2 \Rightarrow \exists \text{ rel solo con dato al bordo } \neq 0$$

Proveremo ora al caso di Neuman.

Da Ω con un Lip , consideriamo il problema di Neuman:

$$\begin{cases} Lu = -\nabla \cdot (A(x) \nabla u(x)) + s(x) \cdot \nabla u + d(x)u = f \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g \end{cases} \Big|_{\Omega}$$

come diventa questa condizione per un operatore L di quel tipo?

Per la condizione scalare, pensiamo $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$ e \int :

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \nabla \cdot (A \nabla u) \cdot \varphi(x) dx + \int_{\Omega} s \cdot \nabla u + d u dx \\ & \int_{\Omega} A(x) \nabla u \cdot \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} \varphi A(x) \nabla u \cdot \nabla \varphi dx \\ & \sum_{i,j} a_{ij}(x) u_{x_i} \varphi_{x_j} \quad \varphi \sum_{i,j} a_{ij} u_{x_i} \varphi_{x_j} = \varphi \left(\nabla^T \cdot \nabla u \right) \\ & \sum_{i,j} a_{ij} \varphi_{x_j} = \varphi_{x_i}^A \end{aligned}$$

è giusta $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ e detta densità canonica.
 Con il solito ν detto canonico è il solito ν detto
 (conetto)

⇒ Se α di ν viene detto operator la densità canonica.
 Perché è il caso non è integrato, e retro di ν
 non è ν .

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} u_{x_i} \nu_{x_j} + \int_{\Omega} \sum_{\alpha} c_{\alpha} u_{x_{\alpha}} \varphi + \int_{\Omega} d u \varphi +$$

$$- \int_{\Omega} \varphi \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma = \int_{\Omega} f \varphi$$

cc: $\frac{\partial u}{\partial \nu} = g$ su $\partial \Omega$

Quindi μ di $H^1(\Omega)$ e ν di $C^0(\bar{\Omega})$ con
 $f \in L^2(\Omega)$ operator e $\rho \in L^2(\Omega)$ (con $a_{ij}, c_{\alpha}, d \in L^2(\Omega)$) se
 ν è detto de $C^0(\bar{\Omega})$ e $H^1(\Omega)$.

$$\forall \varphi \in H^1(\Omega) \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j} a_{ij} u_{x_i} \nu_{x_j} + \sum_{\alpha} c_{\alpha} u_{x_{\alpha}} \varphi + d u \varphi \right) dx +$$

$$= \int_{\Omega} f \varphi d\sigma + \int_{\Omega} g \varphi dx$$

Come già in forma canonica:

deteniamo $\mu \in H^1(\Omega)$ tale che

- $a(\mu, \varphi) = T(\varphi) \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega)$ dove
- $a(\mu, \varphi) = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j} a_{ij} u_{x_i} \nu_{x_j} + \sum_{\alpha} c_{\alpha} u_{x_{\alpha}} \varphi + d u \varphi \right) dx$
- $T(\varphi) = \int_{\Omega} f \varphi d\sigma + \int_{\Omega} g \varphi dx$

mostriamo che $T \in H^1(\Omega)^*$ perché

$$|T(\varphi)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \equiv$$

(per il tr di traccia)

$$\leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq$$

$$\leq (C \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)}) \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}$$

quindi $T \in H^1(\Omega)^*$ e $\|T\|_{H^1(\Omega)^*} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)}$

Se $a_{ij}, c_{\alpha}, d \in L^2(\Omega)$ allora la forma $a(\mu, \varphi)$ (regime
 sotto) è lineare e continua su $H^1(\Omega)$.

vedo che la coercenza su $H^1(\Omega)$.

$$a(\mu, \mu) = \int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + \sum_{\alpha} c_{\alpha} u_{x_{\alpha}} u + d u^2 dx \geq$$

(per il pr ell coerc) $a_{ij}(x) \geq \lambda \delta_{ij}$ e $d(x) \geq c_0 > 0$

$$\geq \lambda \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 dx + \int_{\Omega} \sum_{\alpha} c_{\alpha} u_{x_{\alpha}} u dx + c_0 \int_{\Omega} u^2 dx \geq$$

$$\geq \min(\lambda, c_0) \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \sum_{\alpha} c_{\alpha} u_{x_{\alpha}} u dx$$

$$|A| = \left| \int_{\Omega} \sum_n c_n u_n u \right| \leq \left| \int_{\Omega} c \cdot \nabla u u \right|$$

$$\leq \int_{\Omega} |c \cdot \nabla u| \cdot |u| \leq \int_{\Omega} \|c\| \cdot \|\nabla u\| \cdot |u|$$

$$\leq \|c\|_{L^\infty} \int_{\Omega} \|\nabla u\| |u| \leq \|c\|_{L^\infty} \|\nabla u\|_{L^2} \|u\|_{L^2}$$

$$\leq \|c\|_{L^\infty} \|u\|_{H^1}^2$$

non vale il tris
NO!

$$\leq C \|c\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2}$$

entrante $\leq \|u\|_{H^1}$

quindi
sufficiente

$$\Rightarrow a(u, u) \geq \min(\lambda, c_0) \|u\|_{H^1}^2 - \|c\|_{L^\infty} \|u\|_{H^1}^2 =$$

$$= \left(\min(\lambda, c_0) - \|c\|_{L^\infty} \right) \|u\|_{H^1}^2$$

se $\|c\|_{L^\infty} \leq \frac{\lambda}{2} \min(\lambda, c_0)$ allora

$$a(u, u) \geq \frac{1}{2} \min(\lambda, c_0)$$

e la parte \leq rimane. Allora da questo si:

Def. Se Ω è un dominio Ω_i e $\alpha_i, c_i, d_i \in L^\infty$,

$$\sum_i \alpha_i \int_{\Omega_i} \nabla u \cdot \nabla u \geq \alpha \|u\|_{H^1}^2 \quad \forall u \in \Omega$$

$$d(x) \geq c_0 > 0 \quad \forall x \in \Omega$$

$$\|c\|_{L^\infty} \leq \frac{\lambda}{2} \min(\lambda, c_0)$$

Allora $\forall y \in L^2(\Omega)$ e $\forall p \in L^2(\partial\Omega) \exists! u \in H^1(\Omega)$ che soddisfa

$$\begin{cases} Lu = y & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = p & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad e$$

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left\{ \|y\|_{L^2(\Omega)} + \|p\|_{L^2(\partial\Omega)} \right\}$$

Notiamo che se $d \equiv 0$ c'è il problema della rlx u , perché se u è rlx e $d \equiv 0$ allora $u + C$ è rlx (volgaremente si dice che la soluzione è unica nel precedente problema).

È con $d \equiv 0$ c'è il problema di $\exists! u$ e p , ma è qui difficile mostrarlo. Ma ancora si potrebbe risolvere con la teoria delle eterotomie.

Mostrare la teoria non è il modo di dimostrare $\exists! u$ e p della rlx, ma per la rlx.

È noto quindi che trattare con u (data y e p), ma allora la u è un caso particolare di u e p in un problema.

applicare la teoria non è il modo di dimostrare $\exists! u$ e p della rlx, ma per la rlx.

TEORIA DELLA REGOLARITÀ

Supponiamo di aver un equazione

$$Lu = -\nabla \cdot (A(x) \nabla u) + c \cdot \nabla u + d u$$
 risolvente lo sp. di compattezza ed il problema

$$\begin{cases} Lu = f / \Omega & (*) \\ u = 0 / \partial\Omega \end{cases}$$
 allora, $f \in L^2(\Omega)$ esiste, unica e nulla

Se una matrice di coeff. a_{ij} , c_i , d e il termine noto f sono più regolari, si può dire che anche u è più regolare.

brevemente:

Solo nelle lip precedenti, se

- Ω e u son limitati, di classe C^2
- $f \in L^2(\Omega)$
- $a_{ij}, c_i, d \in Lip(\Omega) \Rightarrow$ simmetria debole

e $u \in H^2_0(\Omega)$ e la rlt del problema $*$, allora si risulta

$$u \in H^2(\Omega)$$

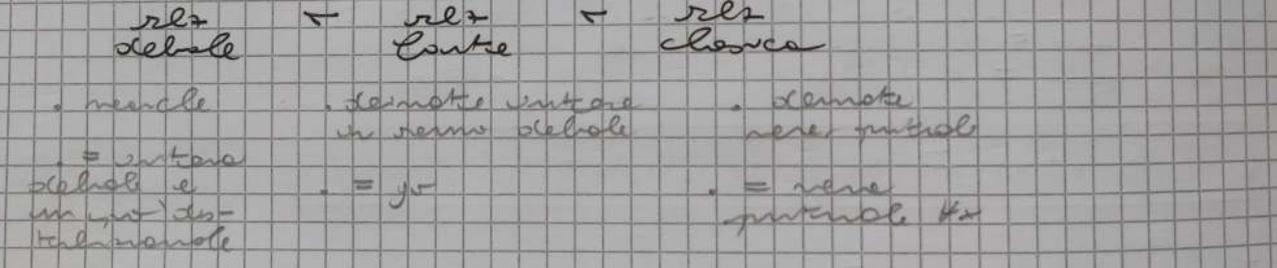
$$\nabla \cdot \left(\begin{matrix} a_{ij} & c_i & d \\ Lip & Lip & Lip \\ \hline & & H^2 \end{matrix} \right) \in L^2$$

e quindi l'eqz

$$-\nabla \cdot (A(x) \nabla u) + c \cdot \nabla u + d u = f$$

risulta soddisfacente internamente Ω (ove l'eqz è una uguaglianza in L^2).

La rlt u è detta rlt forte dell'eqz.



Solo (regolari) ulteriore). Se $m = 0, 1, 2, \dots$ se

- Ω e u di classe C^{m+2}
- $f \in H^m(\Omega)$
- $a_{ij}, c_i, d \in C^{m+1}(\Omega)$

allora la rlt $u \in H^{m+2}(\Omega)$, dove l'eqz regolazione di lip ordine rispetto al termine noto f .

Se non

- Ω e u di classe C^0
- $a_{ij}, c_i, d \in C^0(\Omega)$

allora $u \in H^m(\Omega)$ e quindi (da altri f in) $u \in C^m(\Omega)$.

Il concetto di rlt forte si presta a studiare solo eqz ellittici in caso di non-divergenza.

$$\begin{cases} \sum_{ij} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} = f(x) & / \Omega \\ u = 0 & / \partial\Omega \end{cases}$$

con $\sum_{i,j} a_{ij}(x) \nabla^2 \varphi_j \geq \gamma \|\varphi\|^2$ (per densità ellittica).

è una legge ept non variazionale. Dalla curva, la densità è esente

$u \in H^2(\Omega)$, $f \in L^2$, $a_{ij} \in C^0$, crescente:

possiamo cercare nella classe di Φ una

$$u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

per la cui
è calcolata la minima

$$\text{tale che } \underbrace{\sum_{i,j} a_{ij}(x)}_{L^{\infty}} \underbrace{u_{x_i x_j}}_{L^2} = \underbrace{f(x)}_{L^2} \quad \text{per } \forall x \in \Omega.$$

è φ la sol. di un problema non si esprime. La teoria si occupa di noi e di tutto

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} \right) \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx?$$

non si può rappresentare di restringere ad un spazio di Sobolev bilineari.

Quindi cerchiamo $u \in W^{2,p}(\Omega)$ che soddisfi

$$\cdot \sum_{i,j} a_{ij} u_{x_i x_j} = f \quad \text{con } f \in L^p(\Omega) \text{ per qualche } p \in (1, +\infty)$$

$$\cdot u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega \quad \text{cerchiamo } W_0^{2,p}(\Omega)$$

$$\Rightarrow \text{cerchiamo } u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{2,p}(\Omega), f \in L^p(\Omega), Lu = f \text{ su } \Omega$$

è un po' difficile cercare di essere $a_{ij} \in C^0(\bar{\Omega})$ per avere la ben nota del problema.

teoria di Phragmén, Douglis, Nirenberg

PARTE ANALITICA ↑ , PARTE NUMERICA ↓

24/04

INTRODUZIONE

Molti modelli uniperturbati vengono descritti da EDP. Ma risolvere questi problemi è troppo complesso per essere risolti a mano, si ricorre a metodi numerici.

Quindi cerchiamo di impostare un corso tra

- modelli matematici (EDP)
- metodi numerici (scelta di approssimare la eq., per determinare una discretizzazione del problema)
- algoritmi (codifica di istruzioni eseguite dal calcolatore per risolvere il problema discretizzato)

o leggere relazioni e metodi numerici, e lavorare invece le parti degli algoritmi

Il poter lavorare di questa materia si deve alle miglioramenti dell'hardware e al miglioramento degli algoritmi.

ELEMENTI DI ANALISI FUNZIONALE

Spazio vettoriale (ov) V . Sono definite due operazioni:

$$(+): V \times V \rightarrow V \quad u, v \mapsto u+v$$

$$(\cdot): \mathbb{R} \times V \rightarrow V \quad \lambda, v \mapsto \lambda v$$

Su V con prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è definita un'altra funzione:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R} \text{ tale che valgono}$$

$$(1) \langle u+v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$$

$$(2) \langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$$

$$(3) \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$$

$$(4) \langle u, u \rangle \geq 0 \quad \forall u, \quad \langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} V = \mathbb{R}^n \quad \langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i \\ V = C^0([a, b]) \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx \end{array} \right]$$

Def. Dato V uno sv con prod scalare definiamo norma (indotta) la funzione

$$\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R} \quad u \mapsto \|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

- Proprietà:

$$(1) \|u\| \geq 0, \quad \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

$$(2) \|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$$

$$(3) \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

COMPLEMENTI SUGLI SPAZI DI HILBERT

- Teor. (disug. di Cauchy-Schwarz):

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

- Teor. (identità del parallelogramma):

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

Uno sv V con prod scalare e con norma la norma di quello indotta è detto spazio pre-hilbertiano.

$\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq V$ è una:

- succ. convergente e $u \in V$ re $\|u_n - u\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

- succ. di Cauchy re $\forall \epsilon > 0 \exists k > 0$:
 $\forall n, m > k \quad \|u_n - u_m\| < \epsilon$

In uno spazio pre-hilbertiano ogni succ. convergente e di Cauchy. Si ricorrendo a' nero re tale spazio è anche completo, rispetto a tale norma. Uno SH è uno sv pre-hilbertiano completo.

Se V uno sv con prod scalare. Se $\langle u, v \rangle = 0$ allora diciamo che u è ortogonale a v , $u \perp v$.

- Teor. (Pitagora, caso finito)

$$\left\| \begin{array}{l} V \text{ sv con prod scalare} \\ u_1, \dots, u_n \in V \text{ vett.} \\ \text{ortogonali a 2 a 2} \end{array} \right\| \Rightarrow \left\| \sum_{i=1}^n u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|u_i\|^2$$

- Teor. (Pitagora, caso ∞)

H uno SH, $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è 2 a 2 ortogonali

$\sum_{n=1}^{+\infty} \|u_n\|^2$ converge

$$\Rightarrow \exists u \in H: \sum_{i=1}^{+\infty} u_i = u$$

(cioè $\|u_i - u\| \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$) e vale che

$$\|u\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^{+\infty} u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} \|u_i\|^2$$

T è continuo in ogni pto di X
(caso particolare le convergenze)

$$\left. \begin{aligned} (2) \quad & \forall \varepsilon \in X \text{ e } \forall \{x_n\} \subseteq X \\ & \|x_n - \bar{x}\|_X \rightarrow 0 \\ & \Rightarrow \|Tx_n - T\bar{x}\|_Y \rightarrow 0 \end{aligned} \right\}$$

Siano X, Y sp. normati.
 $T: X \rightarrow Y$ è un operatore
(lineare per l'op.) continuo
(o l) limitato *

(vale una
dij. forte:)

$$\left. \begin{aligned} (2) \quad & T \text{ è continuo in } 0 \in X \\ (3) \quad & \exists k > 0 : \forall x \in X \\ & \|Tx\|_Y \leq k \cdot \|x\|_X \end{aligned} \right\}$$

T così è limitato. Def-
iniamo una norma:

$$\|T\| = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \inf \{k > 0 : \|Tx\|_Y \leq k \cdot \|x\|_X \}$$

Definiamo \mathcal{L} insieme:

$$\mathcal{L}(X, Y) = \{ \text{spazio (vett. normato) di tutti gli operatori lin. continui da } X \text{ a } Y \}$$

congruente
norma

Esempi di operatori lineari continui (o limitati):

• $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^n)$
lineare

$$T: L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n) \quad f \mapsto f * g$$

- è lineare dall'1

- è continuo: $\|Tf\| = \|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^2} \cdot \|g\|_{L^p}$

del tlm nullo
* e delle sue
estremi (comp):

$$\left. \begin{aligned} f \in L^2, g \in L^2 & \Rightarrow f * g \in L^2, \|f * g\| \leq \|f\| \cdot \|g\| \\ f \in L^2, g \in L^p & \Rightarrow f * g \in L^p, \|f * g\| \leq \|f\| \cdot \|g\| \end{aligned} \right\}$$

• $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \quad f \mapsto \hat{f}$

- è lineare dall'1

- è continuo: $\|\hat{f}\| = \|\hat{f}\| = |\hat{f}(f)| = |\int \dots| \leq \int |\dots| = \|f\|_{L^2}$

Per gli operatori lineari definiamo due insiemi:

$$N(T) = \ker(T) = \{ \text{nucleo di } T \} = \{ x \in X : Tx = 0 \}$$

$\|T$ op. lin. $\Rightarrow N(T)$ sottosp. vett. di X

$\|T$ op. lin. cont. \Rightarrow come sopra ma in più è chiuso

$$R(T) = \{ \text{range di } T \} = \{ y \in Y : \exists x \in X \text{ t.c. } y = Tx \} =$$

= { arco e insieme delle immagini ottenute }

$\|T$ op. lin. $\Rightarrow R(T)$ sottosp. vett. di X

Siano X, Y sp. normati,

tali che $X \subseteq Y$.

Diremo che l'inclusione

(di $X \subseteq Y$) è continua

(\Leftrightarrow)

$$\text{Id}: X \rightarrow Y, f \mapsto f$$

è un op. lin. e cont. cioè:

$$\|f\|_Y \leq k \cdot \|f\|_X$$

Realizziamo di funzioni b. lineari continue (\Leftrightarrow limitate) guardando
abbiamo operatori lin. cont. (\Leftrightarrow lin.) nelle forme $\Lambda: X \rightarrow \mathbb{R}$ (o \mathbb{C}),
con X sp. normato.

- Λ lineare: $\Lambda(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha \Lambda(x_1) + \beta \Lambda(x_2)$

- Λ cont. (\Leftrightarrow lin.): $\|\Lambda x\| = |\Lambda x| \leq k \cdot \|x\|_X$

che $\|\cdot\|$ su \mathbb{R} o \mathbb{C} è
solo il modulo

cioè su Y , lo spazio
di arrivo, non è uno
spazio predefinito
ma \mathbb{R} (o \mathbb{C})

Esempio di funzionale lin. cont. (e lin):

• $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$ $\Lambda: L^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \quad f \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x) dx$

- e' bilineare definito per la def di Hölder

- e' lin dall'1

- e' limitato: $\|\Lambda f\| = |\Lambda f| = \left| \int_{\mathbb{R}} fg \right| \leq \int |fg| =$
 $= \|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \frac{\|g\|_{L^q}}{k}$

Telem (di rappresentazione di Riesz).

|| Sia $p \in (1, +\infty)$ e q il suo
 esponente coniugato
 Sia $\Lambda: L^p(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ un
 funz. lin. cont. (lin)

$\exists! f \in L^q(\mathbb{R})$:

$\Lambda f = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x) dx$

e vale che $\|\Lambda\| = \|f\|_{L^q}$

Definiamo l'insieme:

$\mathcal{L}(X, \mathbb{R}) = \{ \text{spazio lineare di } X \} = X' = X^* =$
 $= \{ \text{spazio dei funzionali lineari} \}$
 $\{ \text{continui (lin) definiti su } X \}$

\Rightarrow dal telem di rappresentazione di Riesz segue che $(\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}), \mathbb{R}))' = L^q(\mathbb{R})$

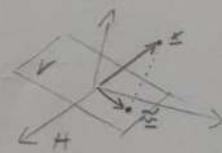
I funzionali lin. cont. e' possibile anche definirli su H degli S_H , oltre che solo su X con normati. Aw:

• $\forall y \in H$ posto

$\Lambda: H \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \langle x, y \rangle$

- e' lineare

- e' limitato: $\|\Lambda x\| = |\Lambda x| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$



Telem (della proiezione).

|| Sia H uno S_H , $V \subseteq H$
 un sottosp. mett
 chiuso

\Rightarrow

$\forall z \in H \exists! \tilde{z} \in V$:

$\|z - \tilde{z}\|_H = \min_{z \in V} \|z - z\|_H$

• Definiamo $\tilde{z} = P_V z$ ed e' quindi definito un operatore di proiezione. Vale che

(1) $z - \tilde{z} \perp V$

(2) P_V e' un funzionale lin. cont. (lin.) tale che $\|P_V z\| \leq \|z\|$

(3) $P_V z = z \iff z \in V$

Cor.

|| Sia H uno S_H , $V \subseteq H$
 sottosp. mett. chiuso
 e tale $V \neq H$

\Rightarrow

$\exists w \in V^\perp$ (ovvero lo w su: $H = V^\perp \oplus V$)
 tale che $w \neq 0$

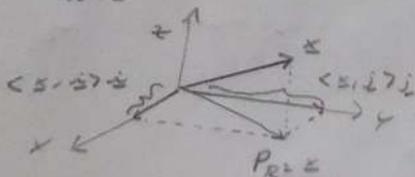
Dim. Sia $z \in H$, $z \notin V$. Consideriamo $P_V z$ e $z - P_V z$, che $\in V^\perp$.

Se $z - P_V z$ fosse $= 0 \Rightarrow z = P_V z$ ma essendo tale z non includibile $z \in V$ (che non possiamo a lui stesso).

$\Rightarrow z - P_V z \neq 0$, e $\in V^\perp \Rightarrow \in V^\perp$ e il w cercato.

In H uno S_H con $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un sistema ortonormale, uno tale che $\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{nm}$, dato un $z \in H$ la sua proiezione e' data

$P_V z = \sum_{i=1}^{\infty} \langle z, e_i \rangle e_i$ dove $V_n = \text{span} \{ e_1, \dots, e_n \}$



Prendiamo come \mathcal{S}_H l'insieme $H = L^2(0, T)$.

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{T}}, \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right), \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) \right\} \text{ è un sistema ortonormale (ON)}$$

Un sistema ON è detto completo se

$$\forall z \in H: \langle z, e_n \rangle = 0 \quad \forall n \Rightarrow z = 0$$

Con $\forall f \in H = L^2(0, T)$ possiamo definire così la sua proiezione:

$$P_N f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)$$

↳ lavorando ancora sui $\forall n$ contenuti come da prima, per estendere con $N \rightarrow +\infty$ vale il

Teor (serie di Fourier in H s.b.).

Sia H uno s.b. e sia $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un sistema ON completo. $\forall z \in H$ possiamo $\tilde{z}_n := \langle z, e_n \rangle$.

\Rightarrow vale che:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \tilde{z}_n e_n = z \quad \left(\begin{array}{l} \text{in senso } L^2 \text{ per } z, \text{ con } H = L^2 \\ \text{cioè c'è convergenza della} \\ \text{serie di Fourier} \end{array} \right)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\tilde{z}_n|^2 = \|z\|_H^2 \quad \left(\text{vale la decomposizione tra } L^2 \text{ e } H \right)$$

$$\{ \tilde{z}_n \}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2 \Rightarrow \text{possiamo definire un operatore } \tilde{z}: H \rightarrow \ell^2 \quad z \mapsto \{ \tilde{z}_n \}_{n \in \mathbb{N}}$$

Esemp di funzionali lineari continui (= l.m.) su \mathcal{S}_H :

Es $\forall x \in H$ (s.b.)

$$\Delta: H \rightarrow \mathbb{R} \quad y \mapsto \langle x, y \rangle$$

- è lineare

- è limitato: $\|\Delta y\|_{\mathbb{R}} = |\Delta y| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_H \cdot \|y\|_H$

$\|\Delta x\|_{\mathbb{R}} = |\Delta x| = \langle x, x \rangle = \|x\|^2 = |\Delta x|$ ma $|\Delta y| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

$\Rightarrow \|x\|_{\mathbb{R}} = |\Delta x| \leq \|x\| \cdot \|y\|_{y=x} = \|x\|^2$

\Rightarrow necessariamente $|\Delta x| = \|x\|^2$

$\Rightarrow \frac{|\Delta x|}{\|x\|} = \|x\|$

$\Rightarrow \|\Delta\|_{H^*} = \|x\|_H$

era la def della $\|\cdot\|$ di un funzionale (con il sup tra le x)

proprietà duale di H

Teor (di rappresentazione di Riesz per s.b. H).

Sia $\Delta \in H^*$, \Rightarrow cioè $\Delta: H \rightarrow \mathbb{R}$ funt. lin. cont.

$\exists! x \in H: \Delta y = \langle x, y \rangle \quad \forall y \in H.$

Si dice che x è l'elemento che rappresenta Δ . È vale che

$$\|\Delta\|_{H^*} = \|x\|_H$$

Dim. (suggerimento delle $\|\Delta\|$ e $\|x\|$) Come dimostreremo

(!) Supp $\exists x_1, x_2 \in H: \Delta y = \langle x_1, y \rangle = \langle x_2, y \rangle \quad \forall y \in H$
 $\Rightarrow \langle x_1, y \rangle - \langle x_2, y \rangle = \langle x_1 - x_2, y \rangle = 0 \quad \forall y$

sceglie $y = x_1 - x_2 \Rightarrow \|x_1 - x_2\|^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

(#) Se $\exists x \in H: \forall y \in H \Delta y = \langle x, y \rangle$ allora: $\Delta y = 0 \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow x \perp y$, ma y era te $\Delta y = 0 \Leftrightarrow x \perp \text{ker}(\Delta)$

- se $\text{ker}(\Delta) = H \Rightarrow \Delta y = 0 \quad \forall y \Rightarrow$ sceglie $x = 0$

- se $\text{ker}(\Delta) \neq H \Rightarrow \exists w \in \text{ker}(\Delta)^\perp: w \neq 0$

$x \in \text{ker}(\Delta)^\perp$

che è un non di H e chiuso

consideriamo l'elemento $y - \frac{\langle Ay, w \rangle}{\langle Aw, w \rangle} w$, che è
 un vettore "reale"

$w \in \ker(A)^{\perp} \Rightarrow Aw \neq 0$ } \Rightarrow $\langle Aw, w \rangle > 0$ e non
 è un numero nullo.

Calcoliamo:

$$A \left(y - \frac{\langle Ay, w \rangle}{\langle Aw, w \rangle} w \right) = Ay - \frac{\langle Ay, w \rangle}{\langle Aw, w \rangle} Aw = 0$$

$$\stackrel{:= u}{=} \Rightarrow A(u) = 0 \Rightarrow u = y - \frac{\langle Ay, w \rangle}{\langle Aw, w \rangle} w \in \ker(A)$$

$\in \ker(A)$

ma $w \in \ker(A)^{\perp}$

$$\Rightarrow \underbrace{\langle u, w \rangle}_{\in \ker(A)^{\perp}} = 0 \Rightarrow \left\langle y - \frac{\langle Ay, w \rangle}{\langle Aw, w \rangle} w, w \right\rangle = 0$$

$$\langle y, w \rangle - \frac{\langle Ay, w \rangle}{\langle Aw, w \rangle} \langle w, w \rangle = 0$$

$$\langle y, w \rangle = \frac{\langle Ay, w \rangle}{\langle Aw, w \rangle} \langle w, w \rangle$$

$$\Rightarrow Ay = \langle y, w \rangle \frac{Aw}{\langle Aw, w \rangle} = \left\langle y, \underbrace{w \frac{Aw}{\langle Aw, w \rangle}}_{:= x} \right\rangle = \langle y, x \rangle$$

□

(SPAZIO PER ALTRE SIM O ALTRO)

risultato da questo lemma:

$$|\Delta y| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \Rightarrow (y=x) \quad |\Delta x| \leq \|x\|^2 \Rightarrow \|\Delta\|_{H \rightarrow H} \leq \|x\|$$

$$\Delta x = \langle x, x \rangle = \|x\|^2 \Rightarrow \frac{|\Delta x|}{\|x\|} = \|x\| \Rightarrow \|\Delta\|_{H \rightarrow H} \geq \|x\|$$

$\|\Delta\|_{H \rightarrow H} \geq \|x\|$ perché $\|\cdot\|_{H \rightarrow H}$
 ha il sup

$$\|x\| \leq \|\Delta\|_{H \rightarrow H} \leq \|x\| \text{ quindi } \Rightarrow \|\Delta\|_{H \rightarrow H} = \|x\|_H$$

Sei Δ un'operatore lineare (su H). Sia H sch, sia $\Delta \in \mathcal{L}(H)$ (lineare in senso su H). Allora vale che $\exists! x \in H: \Delta y = \langle x, y \rangle \quad \forall y \in H$ e inoltre $\|\Delta\|_{\mathcal{L}(H)} = \|x\|_H$

Dim
 (1) = interpretare tra le forme. (anche il \sup)

$\|\Delta\|_{\mathcal{L}(H)} = \sup_{y \in H} \frac{|\Delta y|}{\|y\|} \geq \frac{|\Delta x|}{\|x\|} = \frac{|\langle x, x \rangle|}{\|x\|} = \frac{\|x\|^2}{\|x\|} = \|x\|$ (conservare col \geq nel \sup)

$|\Delta y| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \forall y \in H$

$\Rightarrow \|\Delta\|_{\mathcal{L}(H)} = \sup_{y \in H} \frac{|\Delta y|}{\|y\|} \leq \sup_{y \in H} \frac{\|x\| \cdot \|y\|}{\|y\|} = \|x\|$ (conservare col \leq su $|\langle x, y \rangle|$ che era $|\Delta y|$ (\Rightarrow con CS))

$\Rightarrow \|x\| \leq \|\Delta\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \|x\|$

(2) $\forall! \text{ sur } \exists x_1, x_2: \Delta y = \langle x_1, y \rangle = \langle x_2, y \rangle$. Allora $\langle x_1 - x_2, y \rangle = 0 \quad \forall y$
 con $y = x_1 - x_2$ $\|x_1 - x_2\|^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$
 unico

(3) Se $\exists x: \Delta y = \langle x, y \rangle$ allora $\Delta y = 0 \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow x \perp y \Rightarrow x \perp \ker(\Delta)$
 $\Rightarrow y \in \ker(\Delta) \perp$

- se $\ker(\Delta) = H$ allora $\Delta y = 0 \quad \forall y \in H \Rightarrow$ soluz $x = 0$
- se $\ker(\Delta) \neq H$ allora $\exists w \in \ker(\Delta)^\perp: w \neq 0$
 e che $\ker(\Delta) \oplus \ker(\Delta)^\perp = H$ (ho dom \leftarrow su dom H)

Consideriamo $u := y - \frac{(\Delta y)}{(\Delta w)} w$

$$\Delta u = \Delta y - \frac{\Delta y}{\Delta w} \Delta w = 0 \Rightarrow u \in \ker(\Delta) \text{ mentre } w \in \ker(\Delta)^\perp$$

$$\Rightarrow \langle u, w \rangle = 0 \text{ caso}$$

$$\langle y - \frac{\Delta y}{\Delta w} w, w \rangle = \langle y, w \rangle - \frac{\Delta y}{\Delta w} \|w\|^2 = 0$$

$$\langle y, w \rangle = \frac{\Delta y}{\Delta w} \|w\|^2$$

$$\langle y, \frac{\Delta w}{\|w\|^2} w \rangle = \Delta y \Rightarrow \text{soluz } x = \frac{\Delta w}{\|w\|^2} w$$

① Direttamente per il teorema sul cerchio:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u = f(\theta) \end{cases} \Big|_{\partial B_R}$$

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta$$

vedere SF, unica volta che appare
arrivare al caso dopo

② Neumann per il teorema sul cerchio:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = f(\theta) \end{cases} \Big|_{\partial B_R}$$

$$u(r, \theta) = C + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \frac{R}{n} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

a_n e b_n come sopra. Compire per i coefficienti
quelli mancanti nel modo classico.

$$a_n = \frac{R}{T} \int_0^T f(\theta) \cos\left(\frac{2\pi n \theta}{T}\right) d\theta = \int_{T=2\pi} = \dots$$

③ pdC-Direttamente per il eqt del calore omogeneo sul rettangolo.

$$\begin{cases} u_t - D u = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \end{cases} \Big|_{[0, l] \times [0, +\infty)}$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{l^2} t} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T \tilde{f}(x) \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx = \left\{ \begin{array}{l} T=2l \text{ con } \tilde{f} \\ \text{la funzione dispari} \end{array} \right.$$

$$= \frac{2}{2l} \int_0^{2l} \tilde{f}(x) \sin\left(\frac{2\pi n x}{2l}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{l} \int_0^{2l} \tilde{f}(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{lo stesso} \\ \text{però} \end{array} \right.$$

$$= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx$$

④ pdC-Neumann per il eqt del calore omogeneo sul rettangolo.

$$\begin{cases} u_t - D u = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0 \end{cases} \Big|_{[0, l] \times [0, +\infty)}$$

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{l^2} t} \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

$$a_n = \dots = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx$$

⑤ pdC per eqt di diffusione transiente e reattiva

$$\begin{cases} u_t - D u_{xx} + v u_x + \theta u = 0 \\ u(x, 0) = g(x) \end{cases} \Big|_{x \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{caso omogeneo}} \Big|_{t > 0}$$

$$u(x, t) = \tilde{w}(\cdot, t) * g(\cdot) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{w}(x-y, t) g(y) dy$$

$$\tilde{w}(x, t) = w(x, t) \cdot e^{ax+bt} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4Dt}} e^{-\frac{1}{4Dt} x^2} \left[e^{(\frac{v}{2D})x} \cdot e^{-(\theta + \frac{v^2}{4D})t} \right]$$

$$\begin{cases} u_t - D u_{xx} + v u_x + \theta u = f(x, t) \\ u(x, 0) = 0 \end{cases} \Big|_{x \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{caso non omogeneo}} \Big|_{t > 0}$$

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \tilde{w}(x-y, t-\tau) f(y, \tau) dy d\tau$$

⑥ pdc per l'eqz brasse del trasporto (e reazione) nulla
 netta

$$\begin{cases} u_{tt} + v u_x = 0 \\ u(x, 0) = g(x) \end{cases} \quad \begin{matrix} x \in \mathbb{R} \\ t > 0 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} u_{tt} + v u_x = f(x, t) \\ u(x, 0) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x \in \mathbb{R} \\ t > 0 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} u_{tt} + v u_x + \beta u = 0 \\ u(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{tt} + v u_x + \gamma u = f(x, t) \\ u(x, 0) = 0 \end{cases}$$

$$u(x, t) = f(x - vt)$$

$$u(x, t) = \int_0^t f(x - v(t - \tau), \tau) d\tau$$

$$u(x, t) = e^{-\beta t} f(x - vt)$$

$$u(x, t) = \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} f(x - v(t-\tau), \tau) d\tau$$

⑦ pdc-D e pdc-N per l'eqz della corda vibrante limitata

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \\ u(x, 0) = g(x) \\ u_t(x, 0) = h(x) \end{cases} \quad \begin{matrix} (0, l) \\ t > 0 \end{matrix}$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \left\{ \alpha_n \cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) + \beta_n \text{sen}\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) \right\}$$

$$\alpha_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx$$

$$\beta_n \cdot \frac{n\pi c}{l} = \frac{2}{l} \int_0^l h(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx$$

SF in seni
 seni

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0 \\ u(x, 0) = g(x) \\ u_t(x, 0) = h(x) \end{cases}$$

$$u(x, t) = \frac{\alpha_0}{2} + \frac{\beta_0}{2}t + \sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \left\{ \alpha_n \cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) + \beta_n \text{sen}\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) \right\}$$

$$\alpha_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx$$

$$\beta_n \cdot \frac{n\pi c}{l} = \frac{2}{l} \int_0^l h(x) \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx$$

SF in seni
 coseni

ma β_0 calcolato
 senza questo

⑧ pdc per l'eqz della corda vibrante illimitata, con
 emmissioni e non assorbenti

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = g(x) \\ u_t(x, 0) = h(x) \end{cases} \quad (R, t > 0)$$

$$u(x, t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y) dy$$

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x, t) \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

$$u(x, t) = \int_0^t \frac{1}{2c} \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(y, \tau) dy d\tau$$

⑨ pdc-D per l'eqz della membrana vibrante rettangolare (conca
 al bordo)

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \\ u(x, y, t) = 0 \text{ su } \partial R \\ u(x, y, 0) = g(x, y) \\ u_t(x, y, 0) = h(x, y) \end{cases} \quad (R, t > 0)$$

$$u(x, y, t) = \sum_{m, n \in \mathbb{N}} \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \left\{ \alpha_{mn} \cos(\omega_{mn}t) + \beta_{mn} \text{sen}(\omega_{mn}t) \right\}$$

$$\omega_{mn}^2 = -c^2 \lambda_{mn} = c^2 \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)$$

$$\alpha_{mn} = \frac{2}{a} \frac{2}{b} \int_0^a \int_0^b g(x, y) \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dx dy$$

$$\beta_{mn} \cdot \omega_{mn} = \frac{2}{a} \frac{2}{b} \int_0^a \int_0^b h(x, y) \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dx dy$$

SF in
 seni
 seni

⑩ pdc-D per l'eqz del placche sul rettangolo (con cc nulla)

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 \\ u(x, y, t) = 0 \text{ su } \partial R \\ u(x, y, 0) = g(x, y) \end{cases}$$

$$u(x, y, t) = \sum_{m, n \in \mathbb{N}} e^{-\omega_{mn}^2 t} \beta_{mn} \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$\omega_{mn}^2 = -\lambda_{mn} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)$$

$$\beta_{mn} = \frac{2}{a} \frac{2}{b} \int_0^a \int_0^b g(x, y) \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dx dy$$

SF in
 seni
 seni

METODI DELLE DIFFERENZE FINITE (DF)

Approssimazione della derivata prima:

(un punto)
ordine 1

$$u'(x_0) \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{h} = D_{x_0}^{FW}(u)$$

(due punti)
ordine 1

$$u'(x_i) \approx \frac{u_i - u_{i-1}}{h} = D_{x_i}^{BW}(u)$$

(centrate)
ordine 2

$$u'(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = D_{x_i}^{C1}(u)$$

Approssimazione della derivata seconda

(centrate)
ordine 2

$$u''(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = D_{x_i}^{C2}(u)$$

DF PER L'EQE DI LAPLACE - POISSON

PROBLEMA CON CC DI DIRICHLET

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & x \in (a, b) \\ u(a) = \alpha \\ u(b) = \beta \end{cases}$$

modello:

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = f(x_i) \quad i \in \mathcal{I}^{N-1}$$

e vincolando i nodi x_1 e x_{N-1} equivalenti ad $u_1 = \frac{\alpha}{h}$ e $u_{N-1} = \frac{\beta}{h}$. Anziché

$$\begin{cases} \frac{1}{h^2}(2u_1 - u_2) = f(x_1) + \frac{\alpha}{h^2} \\ \frac{1}{h^2}(-u_1 + 2u_2 - u_3) = f(x_2) \\ \vdots \\ \frac{1}{h^2}(-u_{N-2} + 2u_{N-1}) = f(x_{N-1}) + \frac{\beta}{h^2} \end{cases}$$

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N = \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) + \frac{\alpha}{h^2} \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) + \frac{\beta}{h^2} \end{pmatrix}$$

PROBLEMA CON CC MISTE: DIRICHLET E NEUMANN

(1) METODO UPWIND

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & x \in (a, b) \\ u'(a) = \alpha \\ u(b) = \beta \end{cases}$$

modello:

Come prima, per $i \in \mathcal{I}^{N-1}$, mentre in x_0 usiamo una approssimazione

$$u'(a) = u'(x_0) \approx \frac{u_1 - u_0}{h} = \alpha$$

Anziché si ricava

$$\begin{cases} \frac{1}{h^2}(u_1 - u_0) = \frac{\alpha}{h} \\ \frac{1}{h^2}(-u_0 + 2u_1 - u_2) = f(x_1) \\ \vdots \end{cases}$$

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N = \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{h} \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) + \frac{\beta}{h^2} \end{pmatrix}$$

(2) METODO DCT E GHOST NODE

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \\ u'(a) = \alpha \\ u(b) = \beta \end{cases}$$

modello:

Dimensione delle u_i con $i \in \mathcal{I}_0^{N-1}$ accisa, ma ora in $x_0 = a$ considero due incognite

$$-u''(x_0) = f(x_0) \quad u'(x_0) = \alpha$$

$$-\frac{u_1 - 2u_0 + u_{-1}}{h^2} = f(x_0) \quad \frac{u_1 - u_{-1}}{2h} = \alpha$$

Anziché si ricava

$$\begin{cases} \frac{1}{h^2}(u_1 - u_0) = \frac{\alpha}{h} - \frac{f(x_0)}{2} \\ \frac{1}{h^2}(-u_0 + 2u_1 - u_2) = f(x_1) \\ \vdots \end{cases}$$

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N = \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{h} - \frac{f(x_0)}{2} \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) + \frac{\beta}{h^2} \end{pmatrix}$$

Questo metodo (tranne UPWIND) non è del 2° ordine, e per la convergenza vale da provare che:

$$\|u\|_{\infty} \leq \frac{1}{36} h^2 \|y''\|_{\infty}$$

13) METODO UPWIND 2

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \\ u'(a) = \alpha \\ u(b) = \beta \end{cases}$$

Modello: usiamo una approx del 2° ordine per le derivate prime, discretizzate (upwind)

$$u'(a) = u'(x_0) \approx \frac{-3u_0 + 4u_1 - u_2}{2h} = \alpha$$

Quindi si ricava

$$\begin{cases} \frac{1}{2h^2} \left(-\frac{3}{2}u_0 + 2u_1 - \frac{1}{2}u_2 \right) = \frac{\alpha}{2} \\ \frac{1}{2h^2} (-u_0 + 2u_1 - u_2) = f(x_1) \\ \vdots \end{cases}$$

$$\frac{1}{2h^2} \begin{pmatrix} -3/2 & 2 & -1/2 \\ -1 & 2 & -1 \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N = \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2} \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) + \beta/h^2 \end{pmatrix}$$

DETTAGLI TEORICI

La matrice A_h è sempre e molto invariante

$$A_h = \frac{1}{2h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$$

$$\lambda_i = \frac{q}{2h^2} \sin^2\left(\frac{\pi i}{2}\right) \quad i=1, \dots, N-1$$

$$\lambda^{\min} = \lambda_{i=1} = \frac{\pi^2}{4h^2}$$

$$\lambda^{\max} = \lambda_{i=N-1} = \frac{q}{2h^2}$$

$$\Rightarrow \kappa_2(A) = \frac{\lambda^{\max}}{\lambda^{\min}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{q}{\pi^2/4} = \mathcal{O}(h^{-2})$$

CONSISTENZA: si valuta il rapporto dello schema applicato sulla rete rispetto al vero schema continuo. Se $\rightarrow 0$ ordine p se:

$$LTE_{ij} = (L_h u - f_h)_{ij} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \mathcal{O}(h^p) \quad \text{se } LTE_{ij} = \mathcal{O}(h^p)$$

Il metodo si chiama 2° ordine, con $p=2$ (come UPW1).

STABILITÀ: si valuta se la rete numerica dipende con continuità dai dati iniziali. Uno schema è stabile se:

$$\|u_h\| \leq C_h \cdot \|f_h\| \quad C_h \leq h: \text{costante di stabilità (la } \|\cdot\| \text{ quella del max)}$$

Il metodo si chiama 2° ordine, con $C_h = 1/h$.

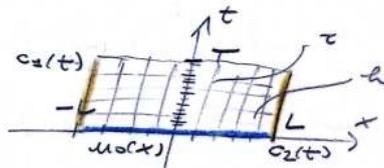
CONVERGENZA: si valuta se il errore va a zero. Uno schema è convergente se

$$e_h = u(x_i) - u_i \xrightarrow{h \rightarrow 0} \mathcal{O}(h^p) \Leftrightarrow \|e_h\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} \mathcal{O}(h^p)$$

DF PER L'EQZ DEL CALORE

Stavolta ci è un solo modello di problema, e tre diversi schemi per risolverlo:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x,t) & x \in (-L, L) \\ u(-L, t) = c_1(t) & t \in (0, T] \\ u(L, t) = c_2(t) & \\ u(x, 0) = u_0(x) & \end{cases}$$



Il metodo:

La $\partial_{xx} u$ la discretizziamo con la formula a tre punti, la $\partial_t u$ con esplicito/implicito, e così troviamo EAC e EIC. mentre CN è la loro media, UCC.

METODO EAC: $\frac{1}{\tau}(\underline{u}^{n+1} - \underline{u}^n) + A_e \underline{u}^n = \underline{F}^n$

$\Rightarrow \underline{u}^{n+1} = (I - \tau A_e) \underline{u}^n + \tau \underline{F}^n$

$\underline{u}^0 = \begin{pmatrix} u_0(x_1) \\ \vdots \\ u_0(x_{N-1}) \end{pmatrix}$ $\underline{F}^n = \begin{pmatrix} f(x_1, t^n) + \frac{c_1(t^n)}{\Delta x^2} \\ \vdots \\ f(x_{N-1}, t^n) + \frac{c_2(t^n)}{\Delta x^2} \end{pmatrix}$

$I - \tau A_e$ è una matrice sparsa (ha elementi tutti ≤ 0)

$C_e = (I - \tau A_e)$
 $(\lambda_i = 1 - \tau \lambda_i(A_e))$
 $|\lambda_i| = 1 \Rightarrow \dots \tau \leq \frac{\Delta x^2}{2}$

esplicito / condiz. a-stab / ordine cons/stab
 $\tau \leq \frac{\Delta x^2}{2}$ / $O(\tau) + O(\Delta x^2)$

METODO EIC: $\frac{1}{\tau}(\underline{u}^{n+1} - \underline{u}^n) + A_e \underline{u}^{n+1} = \underline{F}^{n+1}$

$\Rightarrow \underline{u}^{n+1} = (I + \tau A_e)^{-1} [\underline{u}^n + \tau \underline{F}^{n+1}]$

$\underline{u}^0 = \begin{pmatrix} u_0(x_1) \\ \vdots \\ u_0(x_{N-1}) \end{pmatrix}$ $\underline{F}^{n+1} = \begin{pmatrix} f(x_1, t^{n+1}) + \frac{c_1(t^{n+1})}{\Delta x^2} \\ \vdots \\ f(x_{N-1}, t^{n+1}) + \frac{c_2(t^{n+1})}{\Delta x^2} \end{pmatrix}$

$I + \tau A_e$ è una M-matice (diagonalmente dominante)

$C_e = (I + \tau A_e)^{-1}$
 $(\lambda_i = \frac{1}{1 + \tau \lambda_i(A_e)})$

implicito / incondiz. a-stab / ordine cons/stab
 $\forall \tau \forall \Delta x$ / $O(\tau) + O(\Delta x^2)$

METODO CNC: $\frac{1}{\tau}(\underline{u}^{n+1} - \underline{u}^n) + \frac{1}{2}(A_e \underline{u}^{n+1} + A_e \underline{u}^n) = \frac{1}{2}(\underline{F}^{n+1} + \underline{F}^n)$

$\Rightarrow \underline{u}^{n+1} = (I + \frac{\tau}{2} A_e)^{-1} [(I - \frac{\tau}{2} A_e) \underline{u}^n + \frac{\tau}{2} (\underline{F}^{n+1} + \underline{F}^n)]$

$\underline{u}^0, \underline{F}^n, \underline{F}^{n+1}$ come negli altri metodi

ricorrendo alla BNE per tutto il dominio
 la vera sol^o: $\underline{u}^n = \begin{pmatrix} c_1(t^n) \\ \underline{u}^n \\ c_2(t^n) \end{pmatrix}$

implicito / incondiz. a-stab / ordine cons/cons
 $\forall \tau \forall \Delta x$ / $O(\tau^2) + O(\Delta x^2)$

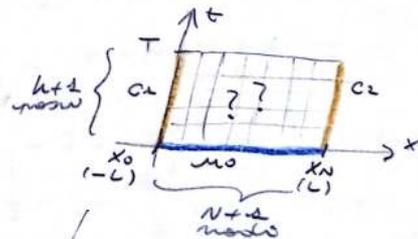
Per dimostrare tutto ciò allora basta un teo di punto e non meno.
Defin (1). **CONDIZIONE + STABILITÀ \Rightarrow CONVERGENZA**

(ovvero se stabile: se c'è CONDIZIONE, allora vale che STABILITÀ \Rightarrow CONVERGENZA)

Defin (2). **ASSOLUTA STABILITÀ \Rightarrow STABILITÀ**
 $\| (C_e)^n \| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ / $\| (C_e)^n \| \leq C_s$

MODELLI NUMERICI

$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x,t) \\ u(-L,t) = c_1(t) \\ u(L,t) = c_2(t) \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$ $\left. \begin{matrix} -L \leq x \leq L \\ 0 \leq t \leq T \end{matrix} \right\} \text{CC}$



conosciamo già queste cose

Analitici, per tutti convergono con lo stesso

$u = \text{zeros}(N+1, k+1)$
 $u(:, 1) = u_0(x)$
 $u(1, :) = c_1(t)$
 $u(end, :) = c_2(t)$

ancora per tutto la matrice A:

$C = \text{ones}(N-1, 1)$
 $A = \frac{1}{\Delta x^2} \text{sparses}([-e \ 2e \ e], [-1 \ 0 \ 1], N-1, N-1)$

lavoriamo solo sui nodi interni allora

METODI NELLA FORMA MATRICIALE C_{τ}^{τ} (CON $f=0$)

(EA) $\underline{u}_{m+1} = (I - \tau A) \underline{u}_m$

(EI) $\underline{u}_{m+1} = (I + \tau A)^{-1} \underline{u}_m$

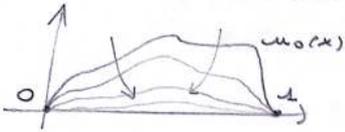
(CN) $\underline{u}_{m+1} = (I + \frac{\tau}{2} A)^{-1} (I - \frac{\tau}{2} A) \underline{u}_m$

$C_{\tau}^{\tau} = I - \tau A$
 $C_{\tau}^{\tau} = (I + \tau A)^{-1}$
 $C_{\tau}^{\tau} = (I + \frac{\tau}{2} A)^{-1} (I - \frac{\tau}{2} A)$

ASSOLUTA STABILITA'

un metodo è assolutamente stabile se, per il problema modello: , se ha che le rel numerica è tale che:

$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \neq 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases}$



$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\underline{u}_m\|_{\infty} = 0$

perché per la vera rel vale che:
 $\lim_{t \rightarrow \infty} \max_{x \in (0,1)} |u(x,t)| = 0$

$\Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \|\underline{u}_{m+1}\|_{\infty} = 0$

$\Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \|C_{\tau}^{\tau} \underline{u}_m\|_{\infty} = 0$

$\Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \|(C_{\tau}^{\tau})^m \underline{u}_0\|_{\infty} = 0$

\Rightarrow assoluta stabile \Leftrightarrow

$\lim_{m \rightarrow \infty} \|(C_{\tau}^{\tau})^m\| = 0$

$\Leftrightarrow C_{\tau}^{\tau}$ è una matrice convergente

$\Leftrightarrow \rho(C_{\tau}^{\tau}) < 1$

Quanto è stabile se $\max |\lambda_i(C_{\tau}^{\tau})| < 1$ e se invece la condizione di assoluta stabilità.

(EA) $\lambda_0(I - \tau A) = 1 - \frac{\tau c}{2} \sin^2(\frac{\tau \omega h}{2})$ per assenza di

$|\lambda_0| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 - \frac{\tau c}{2} \sin^2(\frac{\tau \omega h}{2}) < 1$

$0 < \frac{\tau c}{2} \sin^2(\frac{\tau \omega h}{2}) < 2 \quad i=N-1$

$0 < \frac{\tau c}{2} \sin^2(\frac{\tau \omega h}{2}) < \frac{\tau c}{2} \sin^2(\frac{\tau \omega h}{2}) < 2$

$< \frac{\tau c}{2} \sin^2(\frac{\tau \omega h}{2}) = \frac{\tau c}{2} < 1$

$\Rightarrow \tau < \frac{2}{c}$

(EI) $\lambda_i(I + \tau A)^{-1} = \frac{1}{1 + \frac{\tau c}{2} \sin^2(\frac{\tau \omega h}{2})}$

$|\lambda_i| < 1 \Leftrightarrow$ sempre $\Rightarrow \tau < \frac{2}{c}$

(CN) ... $\Rightarrow \tau < \frac{2}{c}$

CONSISTENZA

Lo schema numerico (con $f=0$) di $\underline{u}_{m+1} = C_{\tau}^{\tau} \underline{u}_m$, applicandolo alle vere rel in e calcoliamo il residuo che ne emerge.

$\underline{u}_{m+1} = C_{\tau}^{\tau} \underline{u}_m \rightsquigarrow \begin{pmatrix} u(x_1, t_{m+1}) \\ \vdots \\ u(x_{N-1}, t_{m+1}) \end{pmatrix} = C_{\tau}^{\tau} \begin{pmatrix} u(x_1, t_m) \\ \vdots \\ u(x_{N-1}, t_m) \end{pmatrix}$

dove R è un "operatore di restituzione"

$R[u(t_{m+1})] = C_{\tau}^{\tau} R[u(t_m)]$

$\Rightarrow \tau \tau_0 = \underline{LTE} \cdot \tau = R[u(t_{m+1})] - C_{\tau}^{\tau} R[u(t_m)]$

STABILITA'

Seppure con $f=0$ miglioriamo capire come u^n dipende dal dato iniziale $u^0 = u_0(x)$. Dalla relazione col $C\bar{E}$ segue

$$u^{n+1} = C\bar{E}^T u^n = \dots = (C\bar{E}^T)^{n+1} u^0$$

$$\Rightarrow \|u^{n+1}\| \leq \| (C\bar{E}^T)^{n+1} \| \cdot \|u^0\|$$

Quindi dovremo che un metodo è stabile se

$$\| (C\bar{E}^T)^n \| \leq C_S$$

per n fissato ed un limite arbitrario ($n \leq T/\tau = \#$ passi temporali)

Dunque:

stabilità
a-stabilità

$$\| (C\bar{E}^T)^n \| \leq C_S$$

$$\| (C\bar{E}^T)^n \| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$C\bar{E}^T$ limitata
 $C\bar{E}^T$ convergente

e quindi vale che:

a-stab \Rightarrow stabilità

CONVERGENZA

Quadrando se l'errore tende a 0 per $h, \tau \rightarrow 0$.

Coro Esp di Laplace-Poisson

soluzione numerica: $L_a u_n = f_n$

esattezza: $L_a u - f_a = LTE$

$$\forall i) L_a(u(x_i) - u_i) = LTE_i$$

$$\Rightarrow \text{per la stabilità } \|u(x_i) - u_i\| \leq C_S \cdot \|LTE_i\|$$

$$\Rightarrow \forall i) \|e_{i,n}\| \leq C_S \cdot \|LTE\| \rightarrow 0$$

$\rightarrow 0$ per la convergenza

Coro Esp del Calore: dimo che 0 e convergenza se

$$(1) \lim_{h \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0} \|R[u(t_n=0)] - u^{n=0}\| = \lim \|R[u_0(x)] - u^0\| = 0$$

$$(2) \lim_{h \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0} \|R[u(t)] - u^n\| = 0 \quad \forall t \in (0, T)$$

Dim. Mostriamo che $\|R u(t^{n+1}) - u^{n+1}\| \xrightarrow{h, \tau \rightarrow 0} 0$

$$\underbrace{R u(t^{n+1}) - u^{n+1}}_{e_{n+1}} = R u(t^{n+1}) - C\bar{E}^T R u(t^n) + C\bar{E}^T R u(t^n) - u^{n+1}$$

$$e_{n+1} = \tau LTE_n + C\bar{E}^T (R u(t^n) - u^n) =$$

$$\Rightarrow e_{n+1} = \tau LTE_n + C\bar{E}^T e_n =$$

$$= \tau LTE_n + C\bar{E}^T (\tau LTE_{n-1} + C\bar{E}^T e_{n-1}) = \dots =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^n (C\bar{E}^T)^k \tau LTE_{n-k} \right) + (C\bar{E}^T)^{n+1} e_0$$

$$\|e_{n+1}\| \leq \tau \sum_{k=0}^n \| (C\bar{E}^T)^k \| \cdot \|LTE_{n-k}\| + \| (C\bar{E}^T)^{n+1} \| \cdot \|e_0\| \stackrel{STAB}{\leq}$$

$$\leq \tau \sum_{k=0}^n (C_S) \max_w \|LTE_{n-k}\| + (C_S) \|e_0\| \stackrel{CONSIST}{\leq}$$

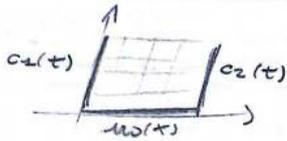
$$\leq \tau C_S (n+1) GTE + C_S \|e_0\| \leq$$

$$\leq \tau C_S GTE + C_S \|e_0\|$$

Espr STAB

\rightarrow per CONSIST

\rightarrow errore e $u_{n+1} = 0$



$$U = \text{zeros}(N+1, k+1)$$

$$U(:, 1) = u_0(x)$$

$$U(1, :) = c_2(t)$$

$$U(\text{end}, :) = c_2(t)$$

$$A = \frac{1}{\tau^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

METODO EA

$$\begin{pmatrix} u_2^{h+1} \\ \vdots \\ u_{N-2}^{h+1} \end{pmatrix} = [I - \tau A] \begin{pmatrix} u_2^h \\ \vdots \\ u_{N-2}^h \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} f_2^h + \frac{c_2(t_h)}{\tau^2} \\ f_3^h \\ \vdots \\ f_{N-2}^h + \frac{c_2(t_h)}{\tau^2} \end{pmatrix}$$

METODO EI

$$\begin{pmatrix} u_2^{h+1} \\ \vdots \\ u_{N-2}^{h+1} \end{pmatrix} = [I + \tau A] \left[\begin{pmatrix} u_2^h \\ \vdots \\ u_{N-2}^h \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} f_2^{h+1} + \frac{c_2(t_{h+1})}{\tau^2} \\ f_3^{h+1} \\ \vdots \\ f_{N-2}^{h+1} + \frac{c_2(t_{h+1})}{\tau^2} \end{pmatrix} \right]$$

METODO CN

$$\begin{pmatrix} u_2^{h+1} \\ \vdots \\ u_{N-2}^{h+1} \end{pmatrix} = [I + \frac{\tau}{2} A] \left\{ [I - \frac{\tau}{2} A] \begin{pmatrix} u_2^h \\ \vdots \\ u_{N-2}^h \end{pmatrix} + \frac{\tau}{2} \begin{pmatrix} f_2^h + f_2^{h+1} \\ \vdots \\ f_{N-2}^h + f_{N-2}^{h+1} \end{pmatrix} \right\}$$

DF PER L'EQZ DEL TRASPORTO

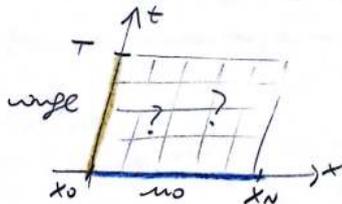
$$\begin{cases} u_t + c u_x = f(x,t) \\ u(a,t) = \text{inflow}(t) \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ 0 \leq t \leq T \end{array} \right.$$

escluso de calculo:

$$x_{m_0}^N \quad h = \frac{b-a}{m}$$

$$t_{k_0}^k \quad \tau = \frac{T}{k}$$

dos puntos $u_m^h \approx u(x_m, t_h)$



conocer en
puente core

ambos se tienen el valor
conocidos con los otros

$$u = \text{zeros}(N+1, k+1)$$

$$u(:, 1) = u_0(x)$$

$$u(1, :) = \text{inflow}(t)$$

METODO EAC approx en avants en t e centrado en x

$$\frac{u_m^{h+1} - u_m^h}{\tau} + c \frac{u_{m+1}^h - u_{m-1}^h}{2h} = f(x_m, t_h) \quad h_0^{k-1} \quad m_0^{N-2}$$

- en u_1^{h+1} no se conoce lo da $u_1^0 = \text{inflow}(t_h)$
 - en $u_2^{h+1} \dots u_{N-2}^{h+1}$ conoce se repite
 - en u_N^{h+1} no se conoce lo da u_N^0 al sustituir
- (... + c $\frac{u_N^h - u_{N-2}^h}{2h}$...)

$$\begin{cases} u_1^{h+1} = u_1^h - \frac{c\tau}{2h} u_2^h + \frac{c\tau}{2h} \text{inflow}(t_h) + \tau f(x_1, t_h) \\ u_2^{h+1} = \dots \\ \vdots \\ u_{N-2}^{h+1} = u_{N-2}^h - \frac{c\tau}{2h} (u_{m+1}^h - u_{m-1}^h) + \tau f(x_m, t_h) \\ u_N^{h+1} = u_N^h - \frac{c\tau}{2h} (u_N^h - u_{N-2}^h) + \tau f(x_N, t_h) \end{cases}$$

$$u_m^{h+1} = u_m^h - \frac{c\tau}{2h} (u_{m+1}^h - u_{m-1}^h) + \tau f(x_m, t_h)$$

$$\begin{pmatrix} u_1^{k+1} \\ u_2^{k+1} \\ \vdots \\ u_{N-1}^{k+1} \\ u_N^{k+1} \end{pmatrix} = \left[I - \frac{c\tau}{2h} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 0 & 1 \\ & & & -1 & 0 & 1 \\ & & & & & -2 & 2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u_1^k \\ u_2^k \\ \vdots \\ u_{N-1}^k \\ u_N^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau f_1^k + \frac{c\tau}{2h} \text{diff}(t_k) \\ \tau f_2^k \\ \vdots \\ \tau f_{N-1}^k \\ \tau f_N^k \end{pmatrix}$$

METODO EIC Approx unidiretaz un t e centrotas un x.

$$\frac{u_m^{k+1} - u_m^k}{\tau} + c \frac{u_{m+1}^{k+1} - u_{m-1}^{k+1}}{2h} = f(x_m, t_{k+1}) \quad u_0^{k-1} \quad u_N^{N-1}$$

$$u_m^{k+1} = u_m^k - \frac{c\tau}{2h} (u_{m+1}^{k+1} - u_{m-1}^{k+1}) + \tau f(x_m, t_{k+1})$$

- un u_1^{k+1} portant do lo $u_1^{k+1} = \text{diff}(t_{k+1})$
- un $u_2^{k+1} \dots u_{N-1}^{k+1}$ care spune
- un u_N^{k+1} unuor la 2r ell unidiretaz (... + c $\frac{u_{N-1}^{k+1} - u_{N-2}^{k+1}}{h}$...)

$$u_m^{k+1} + \frac{c\tau}{2h} (u_{m+1}^{k+1} - u_{m-1}^{k+1}) = u_m^k + \tau f(x_m, t_{k+1})$$

$$\begin{cases} u_1^{k+1} + \frac{c\tau}{2h} (u_2^{k+1}) = u_1^k + \tau f_1^{k+1} + \frac{c\tau}{2h} \text{diff}(t_{k+1}) \\ u_2^{k+1} + \frac{c\tau}{2h} (u_3^{k+1} - u_1^{k+1}) = u_2^k + \tau f_2^{k+1} \\ \vdots \\ u_{N-1}^{k+1} + \frac{c\tau}{2h} (u_N^{k+1} - u_{N-2}^{k+1}) = u_{N-1}^k + \tau f_{N-1}^{k+1} \\ u_N^{k+1} + \frac{c\tau}{2h} (u_N^{k+1} - u_{N-1}^{k+1}) = u_N^k + \tau f_N^{k+1} \end{cases}$$

$$\left[I + \frac{c\tau}{2h} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 0 & 1 \\ & & & -1 & 0 & 1 \\ & & & & & -2 & 2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u_1^{k+1} \\ u_2^{k+1} \\ \vdots \\ u_{N-1}^{k+1} \\ u_N^{k+1} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} u_1^k \\ u_2^k \\ \vdots \\ u_{N-1}^k \\ u_N^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau f_1^{k+1} + \frac{c\tau}{2h} \text{diff}(t_{k+1}) \\ \tau f_2^{k+1} \\ \vdots \\ \tau f_{N-1}^{k+1} \\ \tau f_N^{k+1} \end{pmatrix} \right]$$

METODO UPW. Approx un unidiretaz un t e unidiretaz un t e secunla de c70 e c70 rezettoramente.

$$(c > 0) \quad \frac{u_m^{k+1} - u_m^k}{\tau} + c \frac{u_m^k - u_{m-1}^k}{h} = f(x_m, t_k) \quad u_0^{k-1} \quad u_N^{N-1}$$

$$u_m^{k+1} = u_m^k - \frac{c\tau}{h} (u_m^k - u_{m-1}^k) + \tau f(x_m, t_k)$$

- un u_1^{k+1} portant do lo $u_1^k = \text{diff}(t_k)$
- un $u_2^{k+1} \dots u_{N-1}^{k+1}$ care spune
- un u_N^{k+1} unuor la 2r ell unidiretaz (... + c $\frac{u_N^k - u_{N-1}^k}{h}$...)

$$\begin{cases} u_1^{k+1} = u_1^k - \frac{c\tau}{h} (u_1^k) + \tau f_1^k + \frac{c\tau}{h} \text{diff}(t_k) \\ u_2^{k+1} = u_2^k - \frac{c\tau}{h} (u_2^k - u_1^k) + \tau f_2^k \\ \vdots \\ u_N^{k+1} = u_N^k - \frac{c\tau}{h} (u_N^k - u_{N-1}^k) + \tau f_N^k \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} u_1^{k+1} \\ u_2^{k+1} \\ \vdots \\ u_{N-1}^{k+1} \\ u_N^{k+1} \end{pmatrix} = \left[I - \frac{c\tau}{h} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ -1 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 1 & 0 \\ & & & -1 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u_1^k \\ u_2^k \\ \vdots \\ u_{N-1}^k \\ u_N^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau f_1^k + \frac{c\tau}{h} \text{diff}(t_k) \\ \tau f_2^k \\ \vdots \\ \tau f_{N-1}^k \\ \tau f_N^k \end{pmatrix}$$

$$(c < 0) \quad \frac{u_m^{k+1} - u_m^k}{\tau} + c \frac{u_{m+1}^k - u_m^k}{h} = f(x_m, t_k) \quad u_0^{k-1} \quad u_N^{N-1}$$

$$u_m^{k+1} = u_m^k - \frac{c\tau}{h} (u_{m+1}^k - u_m^k) + \tau f(x_m, t_k)$$

$$\begin{pmatrix} u_1^{k+1} \\ u_2^{k+1} \\ \vdots \\ u_{N-2}^{k+1} \\ u_{N-1}^{k+1} \end{pmatrix} = \left[I - \frac{c\tau}{h} \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & \\ 0 & -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & -1 & 1 \\ & & & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u_1^k \\ u_2^k \\ \vdots \\ u_{N-2}^k \\ u_{N-1}^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau f_1^k \\ \tau f_2^k \\ \vdots \\ \tau f_{N-2}^k \\ \tau f_{N-1}^k - \frac{c\tau}{h} \text{diff}(t_k) \end{pmatrix}$$

El método UPW que es el más exacto en un modelo unidimensional, de compresión $c > 0$ e $c = 0$, e de los que se usan en otros métodos.

$$c \partial_x u(x_n, t_n) \approx c \left[D_x^{c\tau} u(x_n, t_n) \right] - \frac{|c|\tau}{2} \left[D_x^{c^2} u(x_n, t_n) \right]$$

Conociendo el método UPW se resume en:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \left\{ c \left[\frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2\Delta x} \right] - \frac{|c|\tau}{2} \left[\frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{\Delta x^2} \right] \right\} = f(x_n, t_n)$$

$$u_m^{n+1} = u_m^n - c\tau \left[\frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2\Delta x} \right] + \underbrace{\left[\frac{|c|\tau^2}{2} \right]}_{k/2} \left[\frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{\Delta x^2} \right] + \tau f_m^n$$

UPW $\frac{k}{2} = \frac{ c \tau^2}{2}$	LF $\frac{k}{2} = \frac{\Delta x^2}{2}$	LW $\frac{k}{2} = \frac{c^2\tau^2}{2}$
---	---	--

MÉTODO LF (Lax - Friedrichs). Con $k = \Delta x^2$ recomendado

$$u_m^{n+1} = u_m^n - \frac{c\tau}{2\Delta x} (u_{m+1}^n - u_{m-1}^n) + \frac{1}{2} (u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) + \tau f_m^n$$

$$u_m^{n+1} = \frac{1}{2} (u_{m+1}^n + u_{m-1}^n) - \frac{c\tau}{2\Delta x} (u_{m+1}^n - u_{m-1}^n) + \tau f_m^n$$

$$\begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_{N-1}^{n+1} \\ u_N^{n+1} \end{pmatrix} = \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 & 1 \\ & & & & 0 & 2 \end{pmatrix} - \frac{c\tau}{2\Delta x} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 0 & 1 \\ & & & & -2 & 2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{N-1}^n \\ u_N^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau f_1^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{c\tau}{2\Delta x}\right) \text{inff}(t_n) \\ \tau f_2^n \\ \vdots \\ \tau f_{N-1}^n \\ \tau f_N^n \end{pmatrix}$$

MÉTODO LW (Lax - Wendroff). Con $k = c^2\tau^2$ recomendado

$$u_m^{n+1} = u_m^n - \frac{c\tau}{2\Delta x} (u_{m+1}^n - u_{m-1}^n) + \frac{c^2\tau^2}{2\Delta x^2} (u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) + \tau f_m^n + \frac{\tau^2}{2} (\partial_t f_m^n - c \partial_x f_m^n)$$

$$\begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_{N-1}^{n+1} \\ u_N^{n+1} \end{pmatrix} = \left[I - \frac{c\tau}{2\Delta x} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 0 & 1 \\ & & & & -2 & 2 \end{pmatrix} - \frac{c^2\tau^2}{2\Delta x^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{N-1}^n \\ u_N^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau f_1^n + \frac{\tau^2}{2} (\partial_t f_1^n - c \partial_x f_1^n) \\ \vdots \\ \tau f_N^n + \frac{\tau^2}{2} (\partial_t f_N^n - c \partial_x f_N^n) \end{pmatrix}$$

CONTINUAZIONE DI LW (VERA, NON PARTENDO DA UPW)
 d'ora in poi: $u_t + c u_x = f$ (dove $u = u(x,t)$ e $f = f(x,t)$)
 il metodo di LW si scrive in linguaggio in un certo
 modo al computer

$$\begin{aligned}
 u(x_i, t^{n+1}) &= u(x_i, t^n + \tau) = |_{\text{Taylor}} \\
 &= u(x_i, t^n) + \tau u_t(x_i, t^n) + \frac{\tau^2}{2} u_{tt}(x_i, t^n) + \dots \\
 &= \left[u + \tau u_t + \frac{\tau^2}{2} u_{tt} \right] |_{x_i, t^n}
 \end{aligned}$$

$+O(\tau^3)$

Però solo la
 mettere di
 moltiplicare
 con il tempo

Dall'eq. 7:
 $u_t + c u_x = f \Rightarrow \boxed{u_t} = \boxed{f - c u_x}$ (*)

Se ora deriviamo questa:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} (u_t) &\stackrel{(*)}{=} \frac{\partial}{\partial t} (f - c u_x) = f_t - c u_{xt} = \\
 \boxed{u_{tt}} &= f_t - c \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} u = f_t - c \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial t} u \right) \stackrel{(*)}{=} \\
 &= f_t - c \frac{\partial}{\partial x} (f - c u_x) = \\
 &= \boxed{f_t - c f_x + c^2 u_{xx}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow u(x_i, t^{n+1}) &= u + \tau (u_t) + \frac{\tau^2}{2} u_{tt} = \\
 &= u + \tau (f - c u_x) + \frac{\tau^2}{2} (f_t - c f_x + c^2 u_{xx}) = \\
 &= u - c \tau \underbrace{u_x}_{D_x} + \frac{c \tau^2}{2} \underbrace{u_{xx}}_{D_x^2} + \left[\tau f + \frac{\tau^2}{2} (f_t - c f_x) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \rightsquigarrow u_{i+1}^n &= u_i^n - c \tau \left(\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} \right) + \frac{c \tau^2}{2} \left(\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right) + \\
 &+ \left[\tau f_i^n + \frac{\tau^2}{2} \left(\partial_t f_i^n - c \partial_x f_i^n \right) \right]
 \end{aligned}$$

CONSISTENZA DI LW

La stessa monotonia che OPW e LW ϕ ($\frac{w}{2} = \frac{\tau^2 c^2}{2}$):

$$U_{\omega}^{n+1} = U_{\omega}^n - c\tau \left(\frac{U_{\omega+1}^n - U_{\omega-1}^n}{2h} \right) + \frac{\tau^2 c^2}{2} \left(\frac{U_{\omega+1}^n - 2U_{\omega}^n + U_{\omega-1}^n}{h^2} \right)$$

$$\begin{aligned} \tau \epsilon_{\omega} &= L T \epsilon_{\omega} \cdot \tau = U_{\omega}^{n+1} - U_{\omega}^n + c\tau \left(\frac{U_{\omega+1}^n - U_{\omega-1}^n}{2h} \right) - \frac{\tau^2 c^2}{2} \left(\frac{U_{\omega+1}^n - 2U_{\omega}^n + U_{\omega-1}^n}{h^2} \right) = \\ &= U_{\omega}^{n+1} - U_{\omega}^n + c\tau \left(D_x^{01} U_{\omega}^n \right) - \frac{\tau^2 c^2}{2} \left(D_x^{02} U_{\omega}^n \right) = \\ &= U_{\omega}^{n+1} - U_{\omega}^n + c\tau \left(\partial_x U_{\omega}^n + O(h^2) \right) - \frac{\tau^2 c^2}{2} \left(\partial_{xx} U_{\omega}^n + O(h^2) \right) = \\ &= U_{\omega}^{n+1} - U_{\omega}^n + c\tau \left[\partial_x u(x, \omega, t^n) + O(h^2) \right] + \\ &\quad - \frac{\tau^2 c^2}{2} \left[\partial_{xx} u(x, \omega, t^n) + O(h^2) \right] \end{aligned}$$

nella relazione
solo $O(\dots)$ sono
costanti

l'errore (nel caso $\phi=0$):

$$u_t + c u_x = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{u_x} = -\frac{1}{c} u_t$$

$$\boxed{u_{xx}} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{c} u_t \right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (u_x) = \frac{1}{c^2} u_{tt}$$

$$\Rightarrow L T \epsilon_{\omega} \cdot \tau = u(x, \omega, t^{n+1}) - u(x, \omega, t^n) + \tau \left(-\frac{1}{c} u_t(x, \omega, t^n) \right) + \tau O(h^2) - \frac{\tau^2 c^2}{2} \left(\frac{1}{c^2} u_{tt}(x, \omega, t^n) \right) - \tau^2 O(h^2) =$$

$$\left(u(x, \omega, t^{n+1}) - u(x, \omega, t^n) + \tau u_t + \frac{\tau^2}{2} u_{tt} + O(\tau^3) \right)$$

$$= \left(u + \tau u_t + \frac{\tau^2}{2} u_{tt} \right) - u - \tau u_t - \frac{\tau^2}{2} u_{tt} + O(\tau^3) + \tau O(h^2) + \tau^2 O(h^2) + O(\tau^3)$$

$$= \tau O(h^2) + \tau^2 O(h^2) + O(\tau^3) \quad (\text{development per } \tau)$$

$$\Rightarrow \boxed{L T \epsilon_{\omega} = O(h^2) + O(\tau^2) + O(\tau^3)}$$

ANALISI DEI VARI METODI

(EAC) $U_{\bar{\omega}}^{n+1} = U_{\bar{\omega}}^n - c\tau \frac{U_{\bar{\omega}+1}^n - U_{\bar{\omega}-1}^n}{2h} + \tau f_{\bar{\omega}}^n$

(EIC) $U_{\bar{\omega}}^{n+1} + c\tau \left(\frac{U_{\bar{\omega}+1}^{n+1} - U_{\bar{\omega}-1}^{n+1}}{2h} \right) = U_{\bar{\omega}}^n + \tau f_{\bar{\omega}}^{n+1}$

(UPW)
ecc $U_{\bar{\omega}}^{n+1} = U_{\bar{\omega}}^n - c\tau \left(\frac{U_{\bar{\omega}+1}^n - U_{\bar{\omega}-1}^n}{2h} \right) + \frac{|c|\tau h}{2} \left(\frac{U_{\bar{\omega}+1}^n - 2U_{\bar{\omega}}^n + U_{\bar{\omega}-1}^n}{h^2} \right) + \tau f_{\bar{\omega}}^n$

$\frac{h}{2} = \frac{|c|\tau h}{2}$ (UPW) $\frac{h}{2} = \frac{h^2}{2}$ (LF) $\frac{h}{2} = \frac{c^2\tau^2}{2}$ (LW)

CONSISTENZA

Voluto essere come sempre lo abbiamo messo nella lista sopra e adesso ci succede, nel caso $f=0$

(EAC) $\tau_{EAC} = \tau \cdot LTE_{EAC} = u(x_{\bar{\omega}}, t^{n+1}) - u(x_{\bar{\omega}}, t^n) + c\tau \frac{u(x_{\bar{\omega}+1}, t^n) - u(x_{\bar{\omega}-1}, t^n)}{2h}$

$LTE_{EAC} = \frac{u(x_{\bar{\omega}}, t^{n+1}) - u(x_{\bar{\omega}}, t^n)}{\tau} + \frac{c\tau}{2h} =$
 $= D_t^+ u(x_{\bar{\omega}}, t^n) + c D_x^{0+} u(x_{\bar{\omega}}, t^n) =$
 $= O(\tau) + O(h^2) =$
 $= \boxed{O(\tau) + O(h^2)}$

(EIC)
(UPW)
ecc

$u_{\bar{\omega}}^{n+1} = u_{\bar{\omega}}^n - c\tau D_x^{0+} u + \frac{h}{2} D_x^{02} u$
 $\tau_{EIC} = LTE_{EIC} \cdot \tau = u(x_{\bar{\omega}}, t^{n+1}) - u(x_{\bar{\omega}}, t^n) + c\tau D_x^{0+} u - \frac{h}{2} D_x^{02} u$

$LTE_{EIC} = D_t^+ u + c D_x^{0+} u - \frac{h}{2\tau} D_x^{02} u =$
 $= \cancel{O(\tau)} + \cancel{O(h^2)} - \frac{h}{2\tau} O(h^2)$
 $= \left[\frac{h}{\tau} + O(\tau) \right] + c \left[u_x + O(h^2) \right] - \frac{h}{2\tau} \left[\frac{u_{xx} + O(h^2)}{O(\frac{h}{2\tau})} \right] =$
 $= O(\tau) + O(h^2) + O\left(\frac{h}{2\tau}\right)$

$\frac{h}{2\tau}$ non costante in "qualche approssimazione" + "con due ordine lo stesso"

• **UPW** ($\frac{h}{2} = \frac{|c|\tau h}{2}$) $\Rightarrow \frac{|c|\tau h}{2h} = O(h) \leadsto \boxed{O(\tau) + O(h)}$ lineare in τ ed h

• **LF** ($\frac{h}{2} = \frac{h^2}{2}$) $\Rightarrow \frac{h^2}{2\tau} = O\left(\frac{h^2}{\tau}\right) = \boxed{O\left(\frac{h}{\tau}\right)} \leadsto \boxed{O(\tau) + O(h)}$ se τ costante

• **LW** ($\frac{h}{2} = \frac{c^2\tau^2}{2}$) $\Rightarrow \frac{c^2\tau^2}{2\tau} = O(\tau) \leadsto \boxed{O(\tau) + O(h^2)}$ ma non è vero!

LW è un risultato $O(\tau^2) + O(h^2)$ / caso del 2° ordine solo in tempo

STABILITÀ

trovare la forma matriciale dei metodi: $U^{n+1} = C\tau U^n$

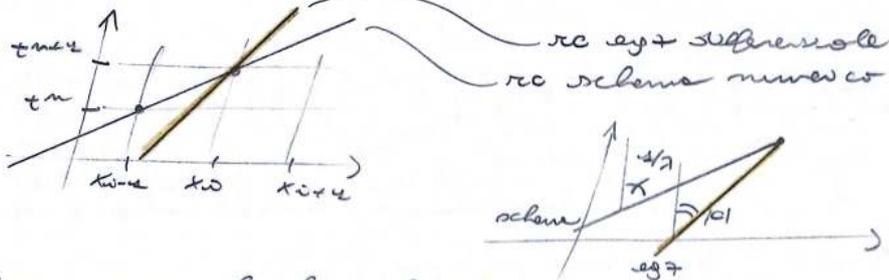
$\Rightarrow \|U^{n+1}\| = \|C\tau U^n\| = \dots = \|(C\tau)^n U^0\| \leq \|(C\tau)^n\| \cdot \|U^0\|$ determinabile
 allora invece

\Rightarrow diremo che un metodo è stabile se $\exists C_0, h, \tau$: $\|U^n\|_{L^1, \tau} \leq C_0 \cdot \|U^0\|_{L^1, \tau}$

- norma 1: $\|U^n\|_{L^1, \tau} = h \sum |U_{\bar{\omega}}^n|$
- norma 2: $\|U^n\|_{L^2, \tau} = \sqrt{h} \left(\sum |U_{\bar{\omega}}^n|^2 \right)^{1/2}$
- norma ∞ : $\|U^n\|_{L^\infty, \tau} = \max_{\bar{\omega}} |U_{\bar{\omega}}^n|$

CONDIZIONE CFL

Suppone un coefficiente tra le reti costante che del network numerico e della rete spaziale.

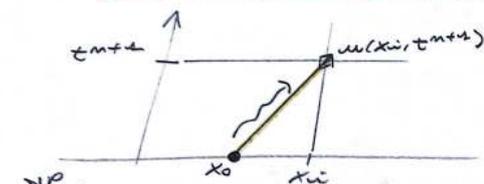


⇒ Supponiamo che le velocità di propagazione dello schema numerico sia \geq di quella dell'eq:

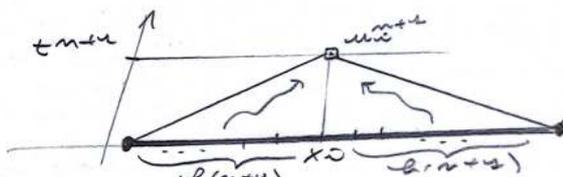
$$\frac{1}{\Delta t} \geq |c| \Leftrightarrow |c| \Delta t \leq 1 \Leftrightarrow |c| \frac{h}{\Delta t} \leq 1 \Leftrightarrow \boxed{C \leq \frac{h}{|c|}}$$

Note per cui $\left\{ \begin{array}{l} \text{la CFL e CN alla convergenza} \\ \text{la CFL e C alla stabilità (metodo esplicito)} \end{array} \right.$

CFL AS CN FOR CONVERGENCE



DIP $D_{u(x_i, t_{n+1/2})} = \{ x_0 = x_i - C t_{n+1/2} \}$



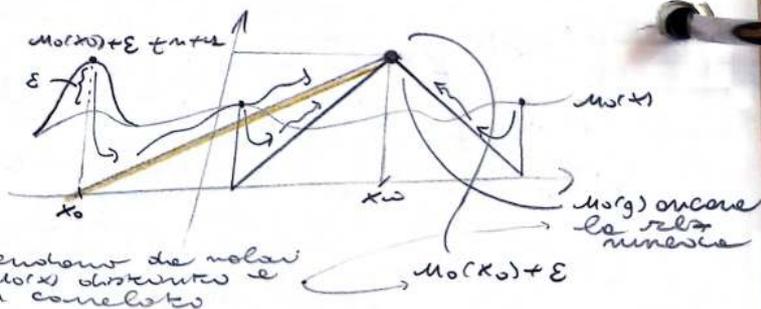
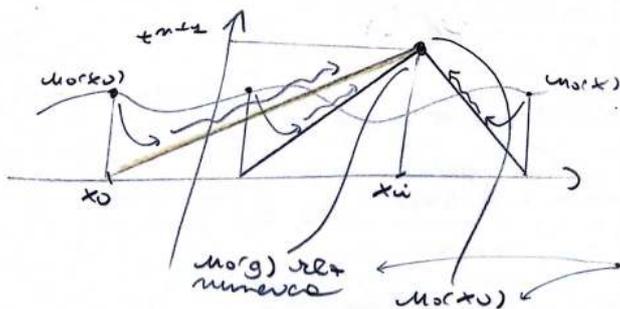
DIP $D_{u(x_i, t_{n+1/2})} = \{ x : |x - x_i| \leq h(n+1/2) \}$

chiedere che la CFL sia soddisfatta \Leftrightarrow

$D_{u(x_i, t_{n+1/2})} \supseteq D_{u(x_i, t_{n+1/2})}$ (DIPENDENZA)

non sono monotone che a CN per la convergenza

Supponiamo che non sia verificata, cioè che invece per $\epsilon > 0$ ("").
Allora:



Una alterazione al dato iniziale non visibile ma visibile nella rete numerica \rightarrow non c'è convergenza

(perché non può colare (non ridotti γ to x_0 perché è un ϵ per risolvere e uscire

CFL AS C₀ FOR STABILITY!

A sono una serie di affermazioni:

1) Se la CFL è soddisfatta, allora lo schema UPW, CFL, CW sono esplicitamente stabile in norma 1.

la costante $C_0: C_0 \leq 1$
 $\Rightarrow \|u_{n+1}\| \leq C_0 \|u_n\| \Rightarrow \|u_{n+1}\| \leq \|u_n\| \leq \dots \leq \|u_0\|$

Dem. (UPW) Lo schema era, con $c > 0$ ed $\rho = 0$:

$$\frac{U_{\omega}^{n+1} - U_{\omega}^n}{\tau} + c \frac{U_{\omega}^n - U_{\omega-1}^n}{h} = 0$$

$$U_{\omega}^{n+1} = U_{\omega}^n - \frac{c\tau}{h} (U_{\omega}^n - U_{\omega-1}^n)$$

$$\| \underline{U}^{n+1} \|_{\ell_1} = h \sum |U_{\omega}^{n+1}| = h \sum \left[|U_{\omega}^n (1 - \frac{c\tau}{h}) + U_{\omega-1}^n (\frac{c\tau}{h})| \right] =$$

$$= \left\{ \frac{c\tau}{h} = \gamma \right\} = h \sum \left[|U_{\omega}^n (1 - \gamma) + U_{\omega-1}^n (\gamma)| \right] \leq$$

$$\leq h \left[\sum |U_{\omega}^n| (1 - \gamma) + \sum |U_{\omega-1}^n| \gamma \right] =$$

re CFL $\frac{c\tau}{h} \leq 1$
 $\frac{1}{2} \leq c \Rightarrow c\tau \leq h$
 $1 - c\tau \geq 0$
 $\Rightarrow \geq 0$

$\gamma > 0$ e $c\tau > 0$
 $\Rightarrow = c\tau$

\Rightarrow possiamo togliere
 $\sim 1-1$ membri

$$= h \left[\sum |U_{\omega}^n| (1 - \gamma) + \sum |U_{\omega-1}^n| \gamma \right] =$$

$$= h \left[\sum_{\omega=0}^{\omega} |U_{\omega}^n| (1 - \gamma + \gamma) \right] = h \sum |U_{\omega}^n| =$$

$$= \| \underline{U}^n \|_{\ell_1}$$

shift degli indici, conto nuovo
in una $\sum_{\omega=0}^{\omega}$

$$\Rightarrow \| \underline{U}^{n+1} \|_{\ell_1} \leq \| \underline{U}^n \|_{\ell_1} \text{ che \u00e9 la tesi } \square$$

(2) Lo schema **EIC** \u00e8 incondizionatamente portante stabile, con il passo temporale arbitrario su CFL, ρ e τ , ma in norma 2

Dem. Lo schema EIC era con $\rho = 0$:

$$\frac{U_{\omega}^{n+1} - U_{\omega}^n}{\tau} + c \frac{U_{\omega+1}^{n+1} - U_{\omega-1}^{n+1}}{2h} = 0$$

$$U_{\omega}^{n+1} - U_{\omega}^n + \frac{c\tau}{2h} (U_{\omega+1}^{n+1} - U_{\omega-1}^{n+1}) = 0 \quad (\cdot U_{\omega}^{n+1} \text{ per } \Sigma)$$

mostrare che $\| \underline{U}^{n+1} \|_{\ell_2} \leq \| \underline{U}^n \|_{\ell_2} \Rightarrow \| \underline{U}^{n+1} \|^2 \leq \| \underline{U}^n \|^2$
dove $\| \underline{U}^{n+1} \|_{\ell_2} = \sqrt{h} \left(\sum |U_{\omega}^{n+1}|^2 \right)^{1/2}$, quindi:

$$\sum (U_{\omega}^{n+1} - U_{\omega}^n) U_{\omega}^{n+1} + \frac{c\tau}{2h} \sum (U_{\omega+1}^{n+1} - U_{\omega-1}^{n+1}) U_{\omega}^{n+1} = 0$$

$$\sum (U_{\omega}^{n+1} - U_{\omega}^n) U_{\omega}^{n+1} = 0$$

$= 0$ per la $\sum_{\omega=0}^{\omega}$
telescopica

$$(x-y)x = x^2 - xy = \frac{1}{2} (x^2 + (x-y)^2 - y^2)$$

$$\sum \frac{1}{2} [(U_{\omega}^{n+1})^2 - (U_{\omega}^n)^2 + (U_{\omega+1}^{n+1} - U_{\omega}^n)^2] = 0 \quad (\cdot h)$$

$$h \sum (U_{\omega}^{n+1})^2 = h \sum (U_{\omega}^n)^2 - h \sum (U_{\omega+1}^{n+1} - U_{\omega}^n)^2$$

$$\| \underline{U}^{n+1} \|_{\ell_2}^2 = \| \underline{U}^n \|_{\ell_2}^2 - \| \underline{U}^{n+1} - \underline{U}^n \|_{\ell_2}^2 \leq$$

$$\leq \| \underline{U}^n \|_{\ell_2}^2$$

$$\Rightarrow \| \underline{U}^{n+1} \|_{\ell_2} \leq \| \underline{U}^n \|_{\ell_2} \text{ che \u00e9 la tesi } \square$$

(3) Lo schema **EAC** non \u00e8 mas portante stabile, pur essendo stabile, ma sotto la condizione (qui stupida)

$$\tau \leq \left(\frac{h}{|c|} \right)^2 = \frac{h^2}{c^2} \quad (\text{e la CFL era } \tau \leq \frac{h}{|c|})$$

È giusto voler in norma 2, come con EIC, quindi, e infatti la
d\u00e0 il miglior risultato e quello, ma non \u00e9 il caso un
certo perché con τ .

METODO DEGLI ELEMENTI FINITI

Una trovata o metodo di EDP basamento sulla formulazione variazionale, cioè globale. È la relazione numerica e la sottintesa come una vera e propria, ma è ad un certo (altre) diversi gradi di libertà.

Idea generale: Metodo di Galerkin (MG) che è un metodo di galleggiare.

Dato un problema con dati in V , il MG approssima in con una $u_h \in V_h$, spazio a dimensione finita, tramite una quadratura. Con lo stesso V_h tale che:

- (1) $\dim V_h = h^{-1} + 1 = \dim V$, $V_h \subset V$
- (2) $V_h \subset V_{h+1}$
- (3) $V_h \supset V$, cioè $\bigcup V_h = V$, cioè $V_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} V$

trovare $u_h \in V_h$:
 $(u_h, \cdot) = (u, \cdot) \forall \cdot \in V_h$
 dove \parallel è lo spaziale
 o un suo quadrato

PROBLEMA DI POISSON

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{in } \partial\Omega \end{cases}$$

PVA \Rightarrow trovare $u \in H_0^1(\Omega)$: $a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$
 dove $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$, $(f, v) = \int_{\Omega} f v$

• Scelta: $V_h = C^2(\Omega) \Rightarrow$ per quadratura uniforme nel prodotto scalare di L^2 , ottenendo

$$(u_h, v_h) = (u, v) \quad \forall v_h \in C^2$$

ma nel 2° membro non possono calcolarlo.

che è se $a(\cdot, \cdot)$ è
 simmetrica, con-
 tinua, coerciva

• Scelta: $V_h = P^m(\Omega) \Rightarrow$ per quadratura uniforme lo spazio $a(\cdot, \cdot)$ non può essere \Rightarrow come libere solare.
 è quindi la quadratura diventa

$$a(u_h, v_h) = a(u, v) \quad \forall v_h \in V_h$$

$$= (f, v_h)_{L^2} \quad \text{per } u \text{ e } v \text{ del problema}$$

$$a(u, v) = (f, v)_{L^2} \quad \forall v \in V \text{ ma quindi errore}$$

$$\text{anche } \forall v_h \in V_h \subset V$$

\Rightarrow Il problema diventa

$$\text{trovare } u_h \in V_h : a(u_h, v_h) = (f, v_h)_{L^2} \quad \forall v_h \in V_h$$

È sufficiente che scegliendo V_h a dim finita, questo equivale a risolvere un sistema lineare:

• Definiamo $\{ \varphi_i(x) \}$ base per V_h , quindi $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ sono una base per V_h . Allora scriviamo

$$u_h = \sum_{i=1}^n U_i \varphi_i(x) \Rightarrow U_1, \dots, U_n \text{ incognite} \Rightarrow \text{la incognita}$$

• Di più se non $a(\cdot, \cdot)$ è quindi bilineare solo quello della base, se anche $a(\cdot, \cdot)$ è indipendente

$$\text{calcolando } (f, \varphi_i)_{L^2} \quad \forall i=1 \rightarrow n \Rightarrow \text{la eq}$$

Sistema lineare:

$$a(u_h, \varphi_i) = (f, \varphi_i)_{L^2} \quad \forall i=1 \rightarrow n$$

$$a\left(\sum_{j=1}^n U_j \varphi_j(x), \varphi_i(x)\right) = (f(x), \varphi_i(x))_{L^2} \quad \forall i=1 \rightarrow n$$

$$\sum_{j=1}^n U_j a(\varphi_j(x), \varphi_i(x)) = (f(x), \varphi_i(x))_{L^2} \quad \forall i=1 \rightarrow n$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^n A_{ij} U_j = F_i$$

$$A_{ij} = a(\varphi_j(x), \varphi_i(x)) = \int_{\Omega} \nabla \varphi_j(x) \cdot \nabla \varphi_i(x)$$

$$F_i = (f(x), \varphi_i(x))_{L^2} = \int_{\Omega} f(x) \varphi_i(x)$$

Supponiamo che nel problema sia sempre ben posto, allora vale che anche il problema di Galerkin (quasi sistema lineare) è ben posto \Rightarrow vale il teorema di Lax-Milgram

che vale sotto la lip di $a(\cdot, \cdot)$ continua e coerciva e che garantisce che

$$\exists! u_2 \in V_2 \text{ tale, t.c.: } \|u_2\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|F\|_{V^*} = \frac{1}{\alpha} \|f\|_L^2$$

Per quanto al sistema lineare, vale che:

- $a(\cdot, \cdot)$ coerciva $\Rightarrow A$ è definita positiva } A è SPD
- $a(\cdot, \cdot)$ simmetrica $\Rightarrow A$ è simmetrica

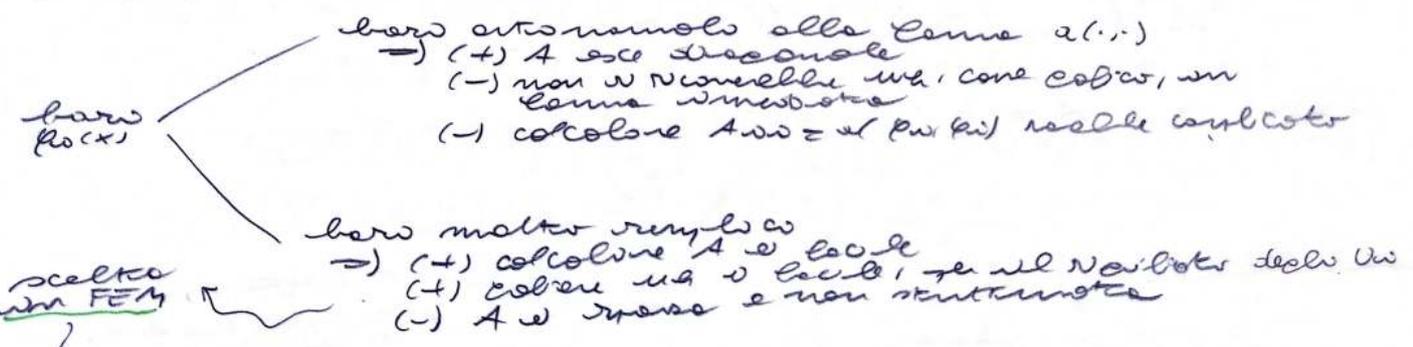
(a coerciva: $\exists \alpha: a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2$
 a continua: $\exists M: a(u, v) \leq M \|u\|_V \|v\|_V$)

Dim (A matrice del tipo, $n \times n$ e coerciva).

$$\begin{aligned} \cdot \quad v^T A v &= \langle v, Av \rangle = \sum_i (Av)_i v_i = \sum_j \sum_i A_{ij} v_j v_i = \sum_j \sum_i v_i v_j a(\phi_j(x), \phi_i(x)) v_j = \\ &= a\left(\sum_{j=1}^n v_j \phi_j(x), \sum_{i=1}^n v_i \phi_i(x)\right) = \left\{ \begin{array}{l} v_i \text{ e } v_j \text{ sono } \\ \text{perché compo dello} \\ \text{spazio sottostante } \end{array} \right\} \\ &= a\left(\underbrace{\sum_{j=1}^n v_j \phi_j(x)}_v, \underbrace{\sum_{i=1}^n v_i \phi_i(x)}_v\right) = \left\{ \begin{array}{l} \text{lo stesso compo-} \\ \text{nente preso} \\ \text{e una più volta} \end{array} \right\} \\ &= a(v, v) \underset{\text{coerc.}}{\geq} \alpha \|v\|_V^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$a(v, v) = 0 \Leftrightarrow \|v\|_V = 0 \Leftrightarrow v(x) \equiv 0$ ma $v = v_i \phi_i$ e
 $v = v(x) = \sum_{i=1}^n v_i \phi_i(x) = 0 \Leftrightarrow v_i = 0 \forall i$ (perché le ϕ_i sono lin. indep.)
 $\Leftrightarrow v = 0$

FEM E SCELTA DI V_h E DELLE BASI $\phi_w(x)$



Spazio V_h : l'insieme delle fun. continue e polinomiali a tratti su una certa partizione del dominio

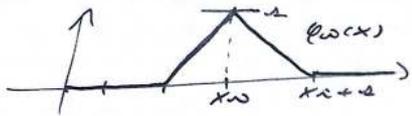
$$\text{spazio } V_h \text{ in FEM} = X_h^m(\Omega) = \left\{ \gamma(x) \in C(\Omega), \gamma(x)|_{P_i(\Omega)} \in P^m(P_i(\Omega)) \right\}$$

$\forall w=0 \rightarrow N$

$m=1$ del FEM lineare che sono quelli che abbiamo visto

partizione di Ω in N elementi

CASO FEM 1D, $\Omega = (0, 1)$

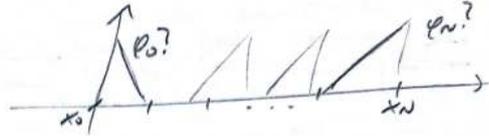


delimitazioni come Ω su loro
 $\phi_0(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & x_j = x_0 \\ 0 & x_j \neq x_0 \end{cases}$

$\Rightarrow u_2 = \sum_{j=1}^2 U_j \phi_j(x) = u_2(x)$

$\Rightarrow u_2(x_i) = U_0 \Rightarrow U_1, \dots, U_2$ sono gradi di libertà della mesh e sono un'unica valore nodale

le loro costruzioni sono strette lineari

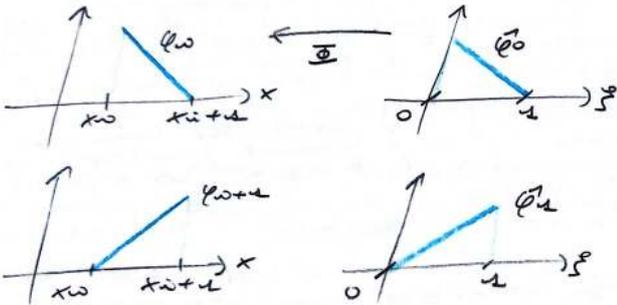


CALCOLO DELLA MATRICE A

$A_{ij} = a(\phi_j(x), \phi_i(x)) = \int_0^1 (\partial_x \phi_j(x)) \cdot (\partial_x \phi_i(x)) dx$

è simmetrica e tridirezionale (oltre che SPD)

Richiede solo pochi microcalcoli ripetitivi, per via del numero delle ent.



$x = \Xi(\xi) = \xi l + x_0$

$\Rightarrow dx = l d\xi$

$\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{l}$

$\phi_0(\xi) = 1 - \xi$

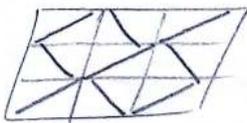
$\phi_{i+1}(\xi) = \xi$

$\Rightarrow \frac{\partial \phi_0}{\partial \xi} = -1, \frac{\partial \phi_{i+1}}{\partial \xi} = 1$

$A_{0, i+1} = \int_{x_0}^{x_{i+1}} \frac{\partial \phi_{i+1}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi_0}{\partial x} dx = \int_{x_0}^{x_{i+1}} \frac{\partial \phi_{i+1}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \phi_0}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dx} dx =$
 $= \int_0^1 \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \cdot \left(\frac{\partial \phi_{i+1}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) (l d\xi) =$
 $= \int_0^1 \left(-\frac{1}{l} \right) \left(+\frac{1}{l} \right) l d\xi = -\frac{1}{l}$

$\dots \Rightarrow A = \frac{1}{l} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$

CASO FEM 2D, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$



partizione uniforme (strutt) vs generale uniforme (non strutt)

$K \in \mathcal{T}_h$ (triangolo/elemento) verticiale

richiesta generale:

- coppia K_i e K_j in abba che $K_i \cap K_j = \emptyset$, oppure un vertice, oppure un lato completo

• altre richieste sulle partizioni:

• Partiz. strutt: $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(K) = \max_{K_i \in \mathcal{T}_h} \text{lati}(K_i)$

• Partiz. non strutturate: $\exists \theta > 0: c \leq \frac{\rho(K_i)}{\text{diam}(K_i)} \leq 1 \quad \forall K_i \in \mathcal{T}_h$

questo rapporto ρ sempre ≤ 1 , neobisogna però chiedere che sia anche $\geq c$, caso che non tende a zero. Per evitare di avere "triangoli troppo allungati"

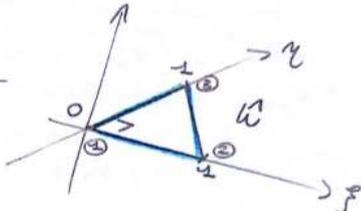
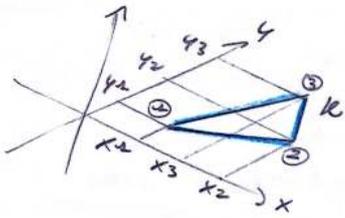
CALCOLO DELLA MATRICE A

$$A_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) = \int_K \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, dx$$

$\nabla \varphi$ perché era
risolto su \mathbb{R}^2
(era $\partial \varphi$ su \mathbb{R})

→ Metodo:

- Costruisci una cella su tutto il triangolo K
- Elementi K calcolano A_{ij}
- mettiamo nel mio centralino sulla A globale

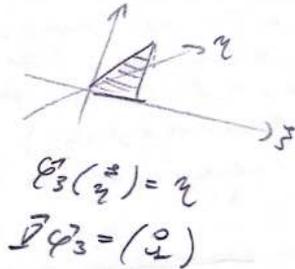
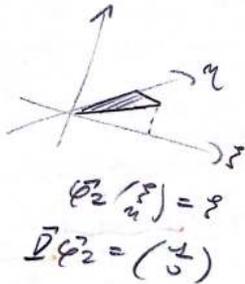
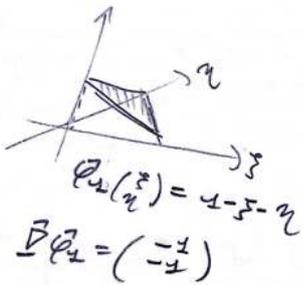


$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B_u \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{pmatrix}}_{B_u} \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}}_{b_u}$$

→ ora mettiamo
ordine le φ come:

$$\varphi_u \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix} = \varphi_u \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix} \Big|_{\begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix} = B_u^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$



$$\text{cdv} : \begin{cases} dx = dx dy = |B_u| d\zeta d\eta & (|B_u| = \det B_u) \\ \nabla = (B_u^{-1})^T \bar{\nabla} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A_{ij} &= A_{u^i u^j} = \int_K \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, dx dy = \\ &= \int_K [(B_u^{-1})^T \bar{\nabla} \varphi_i] \cdot [(B_u^{-1})^T \bar{\nabla} \varphi_j] \, dx dy = \\ &= \int_{\hat{K}} [(B_u^{-1})^T \bar{\nabla} \varphi_i] \cdot [(B_u^{-1})^T \bar{\nabla} \varphi_j] \cdot |B_u| \, d\zeta d\eta = \\ &= [(B_u^{-1})^T \bar{\nabla} \varphi_i]^T [(B_u^{-1})^T \bar{\nabla} \varphi_j] \int_{\hat{K}} |B_u| \, d\zeta d\eta = \left\{ \chi(\hat{K}) = \frac{1}{2} \right\} \\ &= (\bar{\nabla} \varphi_i)^T (B_u^{-1}) (B_u^{-1})^T (\bar{\nabla} \varphi_j) \frac{|B_u|}{2} \end{aligned}$$

ANALISI DEL METODO DI GALERKIN

PVA: trovare $u \in V = H_0^1(\Omega)$: $a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V$
 MG: trovare $u_a \in V_a$: $a(u_a, v_a) = F(v_a) \quad \forall v_a \in V_a$

CONSISTENZA

Volgendosi lo schema del MG nella relazione non occorre che

$$\begin{aligned} r_{es} &= a(u_a, v_a) - F(v_a) \Big|_{u_a = u} = \\ &= a(u, v_a) - F(v_a) = 0 \quad \forall v_a \in V_a \end{aligned}$$

perché le $v_a \in V_a$ ma li u era sol $\forall v \in V$. Quindi MG è sempre (e ha) portante costante, cioè con residuo nullo.

STABILITÀ

Vediamo di costruire una successione tra la u_2 e u_1 e un dato vettore f (o il suo funzionale F). Dove $f \in \mathbb{R}^2$ e $F \in V^*$.

Idea: usiamo dot-prodotto, quindi supponiamo $a(\cdot, \cdot)$ continua e coerciva.

Dim. MG deve trovare $u_2 \in V_2$: $a(u_2, v_2) = F(v_2) \quad \forall v_2 \in V_2$.

sceliamo $v_2 = u_2$ \Rightarrow $a(u_2, u_2) = F(u_2) \leq \|F\| \|u_2\|$

- $a(u_2, u_2) \geq \alpha \|u_2\|^2$ per la coercività
- $F(u_2) \leq \|F\| \|u_2\|$ per la continuità del funzionale

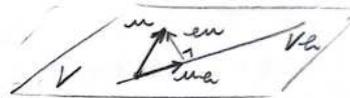
$\Rightarrow \alpha \|u_2\|^2 \leq a(u_2, u_2) = F(u_2) \leq \|F\| \|u_2\|$

$\|u_2\| \leq \frac{1}{\alpha} \|F\| = \frac{1}{\alpha} \|f\| \quad \square$

Che è la condizione di stabilità, con costante $C_f = \frac{1}{\alpha} \|f\|$. Quando sotto quella C_f nel MG è sempre (noncont.) stabile.

ERRORE

$en = en(x) = \frac{u(x) - u_2(x)}{en} \in V_2^\perp$



PVA: $a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V$

\Rightarrow anche $a(u, v_2) = F(v_2) \quad \forall v_2 \in V_2 \subset V$

MG: $a(u_2, v_2) = F(v_2) \quad \forall v_2 \in V_2$

$\downarrow (-) \Rightarrow a(u - u_2, v_2) = 0$

$a(en, v_2) = 0 \Rightarrow$ (perché) $en \in V_2^\perp$, e questa è detta ortogonalità di Galerkin

- \Rightarrow (se α è un grad scalare) vuol dire che
- u_2 è la proiezione di u su V_2
 - u_2 è l'elemento a minima distanza da u , su V_2 , cioè $\|u - u_2\|_2 = \inf_{v_2 \in V_2} \|u - v_2\|_2$ ($\|\cdot\|_2$ = norma indotta dal grad scalare $a(\cdot, \cdot)$)

CONVERGENZA

Dim (Lemma di Céa). Se $a(\cdot, \cdot)$ è continua e coerciva vale che

$\| \frac{u - u_2}{en} \|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_2 \in V_2} \|u - v_2\|_V$

Quindi da una serie sulle en , che entra quindi a zero (e si ha convergenza) se quelli $\inf_{v_2 \in V_2} \|u - v_2\|_V$ o se $V_2 \rightarrow V$. Sembra che $en \rightarrow 0$.

Dim. $\alpha \|u - u_2\|_V \stackrel{coerc.}{\leq} a(u - u_2, u - u_2) =$
 $= a(u - u_2, u - v_2 + v_2 - u_2) =$
 $= a(u - u_2, u - v_2) + \underbrace{a(u - u_2, v_2 - u_2)}_{=0} =$
 $= a(u - u_2, u - v_2) \leq \frac{M}{en \in V_2^\perp} \inf_{v_2 \in V_2} \|u - v_2\|_V$
 $\stackrel{cont.}{\leq} M \cdot \|u - u_2\|_V \cdot \inf_{v_2 \in V_2} \|u - v_2\|_V$

$\Rightarrow \|u - u_2\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_2 \in V_2} \|u - v_2\|_V$

$\|u - u_2\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_2 \in V_2} \|u - v_2\|_V \quad \square$

avrebbe $= \|u - u_2\|_V$? no!
 questa cosa sulle en $= \|u - u_2\|_V$
 vale su una norma α , qui
 viene con V invece

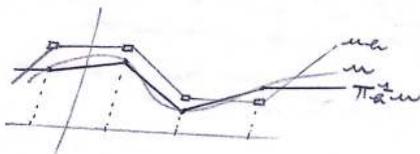
Vediamo ora di capire come trovare/calcolare questo $\inf_{v_2 \in V_2} \|u - v_2\|_V$, dato che non conosciamo la u esattamente

ANALISI DEL METODO FEM

Convertiamo in una forma operativa la tesi del Lemma di Cea:
 Col metodo FEM risolviamo con $V_h = X_h^r$, quindi:

$$\sup_{v \in V_h} \|u - v_h\| = \|u - \Pi_h^r u\|$$

interpolante di grado r (nei nodi, e continua) della soluz. u



cioè l'interpolante della soluz. u al suo centro - la scelta migliore per la $v_h \Rightarrow$ lei dal - e' vera

Avendo il Lemma di Cea diventa:

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \|u - \Pi_h^r u\|_V$$

STIMA DELL'ERRORE

Per stimare quella norma non conosciamo un risultato che vale per un norma α :

$$\|u - \Pi_h^r u\|_\alpha \leq C h^{r+1} \|u^{(r+1)}\|_\alpha \quad \text{se } u \in C^{r+1}(\Omega)$$

o non viene un risultato in norma $V = H^1$. Ci conviene prima con un lem.

LEM. Sia $u \in H^{r+1}(\Omega)$, con $r \geq 1$, e sia $\Pi_h^r u \in V_h = X_h^r$ la sua interpolante. Allora vale che

$$|u - \Pi_h^r u|_{H^k(\Omega)} \leq C_{k,r} h^{r+1-k} |u|_{H^{r+1}(\Omega)} \quad \text{per } k=0,1$$

dove $| \cdot |_{H^k}$ sono le seminorme:

norma di $u \in H^k$ $\|u\|_{H^k}^2 = \sum_{i=0}^k \left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} u(x) \right\|_{L^2(\Omega)}^2$

seminorma di $u \in H^k$ $|u|_{H^k}^2 = \left\| \frac{\partial^k}{\partial x^k} u(x) \right\|_{L^2(\Omega)}^2$

Dunque: a noi interessa studiare $\|u - \Pi_h^r u\|_V$ cioè in $\| \cdot \|_{H^1}$, quindi vediamo cosa ricordiamo di queste: con $r=1$

$$k=0: |u - \Pi_h^r u|_{H^0} = \left\| \frac{\partial^0}{\partial x^0} (u - \Pi_h^r u) \right\|_{L^2} = \|u - \Pi_h^r u\|_{L^2} \leq C h^2 \left\| \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x) \right\|_{L^2}$$

$$k=1: |u - \Pi_h^r u|_{H^1} = \left\| \frac{\partial^1}{\partial x^1} (u - \Pi_h^r u) \right\|_{L^2} = \left\| \frac{\partial}{\partial x} (u - \Pi_h^r u) \right\|_{L^2} \leq C h \left\| \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x) \right\|_{L^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|u - \Pi_h^r u\|_V^2 &= \dots \| \cdot \|_{H^1}^2 = \dots \| \cdot \|_{L^2}^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial x} \dots \right\|_{L^2}^2 = (*) \\ &= \|u - \Pi_h^r u\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial x} (u - \Pi_h^r u) \right\|_{L^2}^2 \leq \\ &\leq C h^4 \left\| \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x) \right\|_{L^2}^2 + C h^2 \left\| \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x) \right\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|u - \Pi_h^r u\|_V = \|u - \Pi_h^r u\|_{H^1} \leq C h \left\| \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x) \right\|_{L^2}$$

Da cui ricordando il Lemma di Cea possiamo scrivere:

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq \frac{M}{\alpha} C h |u|_{H^2} \quad (\text{nel caso } r=1 \text{ e con } u \in H^2=r+1)$$

Questo risultato si può estendere:
LEM (caso u regolare). Se $u \in H^{r+1}(\Omega)$ con $r \geq 1$ vale la stima:

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq \frac{M}{\alpha} C h^r |u|_{H^{r+1}}$$

con FEM con $V_h = X_h^r$ per entrambi i lem

LEM (caso u non regolare). Se $u \in H^{r+1}(\Omega)$ con $r \geq 1$ vale invece:

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq C h^s |u|_{H^{r+1}} \quad s = \min(r, p)$$

Due fun. chiedono sempre $u \in H^2(\Omega)$ come minimo, ma comunque se $u \in H^1$ si manifesta lo shock convergente (ma lo eviene anche super-entico).
 Infine quel fun. e la caratteristiche del FEM con elementi vol. come anche un grid dimensioni.
 Infine se quis anche risolvere una stanza dell'aria ma un minimo L^2 :

Defin. 2) ordine di convergenza in norma L^2 e' h^{p+1} . Case! e' come nel tm di prima ma ora e' ordine e' scalato.

ordine con $\|\cdot\|_{H^1}$: h^p $\rho = \min(p, p)$ ma può sempre con h^1
 ordine con $\|\cdot\|_{L^2}$: h^{p+1} h^1

GESTIONE DELLE CONDIZIONI AL CONTORNO

PVA per $\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$: trovare $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che $a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V = H_0^1$

PVA per $\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$: trovare $u \in \{ \varphi + w \mid \varphi \in H^1(\Omega) \}$ tale che $a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V = H_0^1$
 $f \in L^2(\Omega), g \in C^0(\partial\Omega)$

Quanto visto buona memoria nel primo problema. Per il resto col dato di bordo e' procedimento così:

- troviamo/contorniamo $R(g) \in H^1(\Omega)$ nel ruolo di φ (o estensione) di g su tutto Ω
- definiamo $u = w + R(g)$ che da $w = u - R(g) \Rightarrow w \in H_0^1(\Omega)$
- risolviamo nel PVA per trovare w , da cui infine ricostruiamo la u : Come al PVA diventa
 $a(u = w + R(g), v) = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$
 $a(w, v) = (f, v) - a(R(g), v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$
 (tale che $R(g)|_{\partial\Omega} = g$ mentre non e' nec che $-\Delta R(g) = f$ in Ω)

nel contesto solver numerico delle FEM lavoriamo così:

da $R(g)$ a:
 $R(g) = \sum_{i=1}^{N_b} g(x_i) \varphi_i(x) = R^T a(x)$
 dove N_b e' il numero dei nodi di bordo
 così come $R(g)$ e' una fun. lineare essere detta così e' per chiarezza

da $\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f \cdot v$ a:
 $\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f \cdot v - \int_{\Omega} \nabla R^T a \cdot \nabla v$
 $A \underline{w} \quad E \in \mathbb{R}^{N_b \times N_b} \quad \text{B}_i^T, B_i \in \mathbb{R}^{N_b \times N_b}$

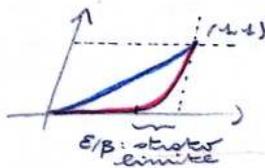
PROBLEMA DI DIFFUSIONE E TRASPORTO

due lavoriamo con il problema

$$\begin{cases} -\varepsilon u_{xx} + \beta u_x = f(x) & \text{in } \Omega = (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \\ \beta \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

Qui $u = u(x)$, siamo su un contesto stazionario. Se $\beta > 0$ e' come con $f=0$ sarebbe:

$$u(x) = \frac{e^{\beta x/\varepsilon} - 1}{e^{\beta/\varepsilon} - 1}$$



$\beta/\varepsilon \gg 1 \Rightarrow \beta \gg \varepsilon$
trasporto dominante
 $\beta/\varepsilon \ll 1 \Rightarrow \beta \ll \varepsilon$
diffusione dominante

Per valutare con quale di questi casi siamo o decise il numero di Peclet: $Pe = \frac{|\beta|L}{2\varepsilon}$

cerchiamo la sua formulazione variazionale:

$$\int_0^1 (-\epsilon u'' + \beta u') v \, dx = \int_0^1 (f(x)) v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$-\epsilon u v \Big|_0^1 + \int_0^1 \epsilon u' v' + \int_0^1 \beta u v' = \int_0^1 f(x) v(x) \, dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \epsilon u' v' \, dx + \int_0^1 \beta u v' \, dx = \int_0^1 f(x) v(x) \, dx$$

$a_\epsilon(u, v) \rightsquigarrow$ DIFF $a_\beta(u, v) \rightsquigarrow$ TRASP la costante ϵ qui non interviene per ipotesi

$a(u, v) = a_\epsilon + a_\beta$: è una forma bilineare continua e coerciva
 \rightsquigarrow DIS. DI CS \rightsquigarrow DIS. DI POINCARÉ

$a \in$ COERCIVA

$a_\epsilon(u, u) = \int_0^1 \epsilon (u')^2 \, dx = \epsilon \|u'\|_{L^2}^2$ } POINCARÉ: $\exists C = C(\Omega) > 0$
 $\|u\|_{H^1}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2 \leq (C^2 + 1) \|u'\|_{L^2}^2$
 $\|u\|_{L^2}^2 \leq C \|u'\|_{L^2}^2$

$$\Rightarrow a_\epsilon(u, u) = \epsilon \|u'\|_{L^2}^2 \geq \frac{\epsilon}{C^2 + 1} \|u\|_{H^1}^2 := \alpha \|u\|_{H^1}^2$$

$a_\beta(u, u) = \int_0^1 \beta u u' \, dx = \beta \frac{u^2}{2} \Big|_0^1 - \int_0^1 \beta u u' \, dx$
 $2 \int_0^1 \beta u u' \, dx = 0$

$$\Rightarrow a_\beta(u, u) = 0 \geq 0 \cdot \|u\|_{H^1}^2$$

Dunque a è continua vale che:

$$a(u, u) \geq \frac{\epsilon}{C^2 + 1} \|u\|_{H^1}^2 := \alpha \|u\|_{H^1}^2$$

$a \in$ CONTINUA

$$a(u, v) = \int_0^1 \epsilon u' v' + \beta u v' \, dx \leq \left\{ \begin{array}{l} \text{CS: CAUCHY-SCHWARZ} \\ \text{o legge di HÖLDER} \end{array} \right\}$$

$$\leq |\epsilon| \|u'\|_{L^2} \|v'\|_{L^2} + |\beta| \|u\|_{L^2} \|v'\|_{L^2} \leq \sqrt{\epsilon^2 + \beta^2} \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$$

$\| \cdot \|_{L^2} \leq \| \cdot \|_{H^1}$

Dunque a è continua con costante costante M :

$$a(u, v) \leq M \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} = (\epsilon + |\beta|) \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$$

Quindi, essendo che a è continua e coerciva vale anche per il teor. di Lax-Milgram, che garantisce che per il problema FEM/MS del PVA di prima, cioè: ora:

trovare $u_h \in V_h = X_h^1$: $a(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_h$
 dove $a(u, v) = \int_0^1 \epsilon u' v' + \beta u v'$ e $(f, v_h) = \int_0^1 f(x) v_h(x) \, dx$

\Rightarrow (LAX-MILGRAM) $\exists!$ una sol. $u_h \in V_h$

FORMULAZIONE MATRICIALE

$$a(u, v) = a_\epsilon + a_\beta = \int_0^1 \epsilon u' v' + \int_0^1 \beta u v'$$

troviamo la matrice A dello schema numerico considerando nei contributi A_ϵ e A_β della due forme bilineari

$$\begin{aligned} (A_{\epsilon\beta})_{ij} &= \epsilon \left[U_{i-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_{i-1}^j \phi_i^j + U_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (\phi_i^j)^2 + U_{i+1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_{i+1}^j \phi_i^j \right] = \\ &= \epsilon \left[U_{i-1} \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{h} h \right) + U_i \left(\frac{1}{2} \frac{1}{h} + \frac{1}{2} \frac{1}{h} \right) h + U_{i+1} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{h} - \frac{1}{2} \frac{1}{h} \right) h \right] = \\ &= \epsilon \left[U_{i-1} \left(-\frac{1}{2} \right) + U_i \left(\frac{2}{2} \right) + U_{i+1} \left(-\frac{1}{2} \right) \right] = \frac{\epsilon}{2} [-U_{i-1} + 2U_i - U_{i+1}] \end{aligned}$$

AGGIUNTE DA FARE AL CODICE FEM

C - MATRIX - 2D

% STIFFNESS MATRIX

$$A_{loc} = C_LAP_LOC(...)$$

$$A(wals, wals) = A(wals, wals) + A_{loc}$$

% FORCING TERM

$$f_{loc} = C_LOC_RHS2D(...)$$

$$f(wals) = f(wals) + f_{loc}$$

$$\begin{cases} -\Delta u = f / \alpha \\ u = 0 \end{cases} \text{ or } \begin{cases} -\Delta u = f / \alpha \\ u = g \end{cases}$$

C - MATRIX - 2D

"Laplace" Error

% STIFFNESS MATRIX AND MASS MATRIX

$$A_{loc} = C_LAP_LOC(...)$$

$$A(wals, wals) += A_{loc}$$

$$M_{loc} = C_MASS_LOC(...)$$

$$M(wals, wals) += M_{loc}$$

% FORCING TERM

$$f_{loc} = C_LOC_RHS2D(...)$$

$$f(wals) += f_{loc}$$

end

$$P = \text{spars}(\text{ndof}, \text{ndof})$$

$$P = \text{Detsi.alpha} \cdot A + \text{Detsi.beta} \cdot M$$

$$\begin{cases} -\alpha \Delta u + \beta u = f / \alpha \\ u = g \end{cases}$$

C - MATRIX - 2D

% STIFFNESS MATRIX AND TRANSFORM MATRICES

$$A_{loc} = C_LAP_LOC(...)$$

$$A(wals, wals) += A_{loc}$$

$$T_{loc} = C_TRANS_LOC(...)$$

$$T(wals, wals) += T_{loc}$$

% FORCING TERM

$$f_{loc} = C_LOC_RHS2D(...)$$

$$f(wals) += f_{loc}$$

end

$$P = \text{Detsi.alpha} \cdot A + T$$

of Detsi. stabilization = "y"

$$P = P + (\text{norm}(\text{Detsi.beta}) \cdot \text{semiregion} \cdot h/2) \cdot A$$

$$\begin{cases} -\alpha \Delta u + \beta \cdot \frac{1}{2} u = f / \alpha \\ u = g \end{cases}$$

" $\epsilon_{tot} = \epsilon + \frac{|B|h}{2}$ " la diffusione è controllata

C - BOUND - COND - 2D

$$A_0 = A$$

$$b_0 = b$$

for

end

$$b = b_0$$

$$A = A_0$$

$$A_0 = A$$

$$b_0 = b - A \cdot u_g$$

for

end

$$b = b_0$$

$$A = A_0$$

$$A_0 = A$$

$$M_0 = M$$

$$P_0 = P$$

$$b_0 = b - P \cdot u_g$$

for

end

$$b = b_0$$

$$A = A_0$$

$$M = M_0$$

$$P = P_0$$

come nel caso la b (il termine noto) del problema in H_0^1 (per u_g la b_0)

$$A_0 = A$$

$$T_0 = T$$

$$P_0 = P$$

$$b_0 = b - P \cdot u_g$$

for

end

$$b = b_0$$

$$A = A_0$$

$$M = M_0$$

$$P = P_0$$

Del secondo problema con $u = g$ su $\partial\Omega$ e $u = 0$ su Ω si può risolvere con quella parte, il problema è

ALG+ STIFF

C-MAIN-2D

7. load data for Fort core

$$\text{Data} = \text{C-data}(\dots)$$
$$\text{Data} \cdot n_{\text{Refinement}} = n_{\text{Ref}}$$

7. mesh creation

$$\text{[Region]} = \text{C-create-mesh}(\dots)$$

7. FE region

$$\text{[ElementRegion]} = \text{C-create-elementRegion}(\dots)$$

7. build "the linear system (in matrix)"

$$\left. \begin{array}{l} [A, b] = \text{C-MATRIX-2D}(\dots) \\ [A, b] = // \\ [A, b, M, P] = // \\ [A, b, T, P] = // \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{uno lo} \\ \text{quattro (per 2 punti)} \\ \text{esempio di volume} \end{array}$$

7. impose boundary conditions

$$\left. \begin{array}{l} [A, b] = \text{C-BOUND-COMB2D}(\dots) \\ [A, b, u_p] = // \\ [A, b, M, P, u_p] = // \\ [A, b, T, P, u_p] = // \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{come} \\ \text{volume} \end{array}$$

7. save data nella struct

$$\text{[structures]} = \text{C-BUILD-OUT-MATRICES}(\dots)$$

7. role to the linear system

$$\left. \begin{array}{l} u_0 = A \setminus b \\ u_0 = A \setminus b \\ u_0 = P \setminus b \\ u_0 = P \setminus b \end{array} \right\}$$

7. enforce boundary conditions (direct)

$$\left. \begin{array}{l} u_l = u_0 \\ u_l = u_0 + u_p \\ u_l = u_0 + u_p \\ u_l = u_0 + u_p \end{array} \right\}$$