# FUNZIONI ELEMENTARI COMPLESSE
(UTILI PER EQZ COMPLESSE)

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\operatorname{Sh} z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \operatorname{Ch} z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Hanno tutte $R=+\infty$ come raggio di convergenza

RELAZIONI TRA LE FUNZIONI ELEMENTARI

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) = e^z$$
$$e^{x-iy} = e^x(\cos y - i \operatorname{sen} y) = e^{\bar{z}}$$

$$\Rightarrow \quad \cos y = \operatorname{Re}(e^{iy}), \quad \operatorname{sen} y = \operatorname{Im}(e^{iy})$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\underbrace{\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}}_{\text{relazione } \operatorname{Re}(e^{iz})}, \quad \underbrace{\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}}_{\text{relazione } \operatorname{Im}(e^{iz})}}$$

$$\boxed{\underbrace{\operatorname{Ch} z = \frac{e^z+e^{-z}}{2}}_{\text{relazione le potenze pari di } e^z \text{ e } e^{-z}}, \quad \underbrace{\operatorname{Sh} z = \frac{e^z-e^{-z}}{2}}_{\text{relazione le potenze dispari di } e^z \text{ e } e^{-z}}}$$

Infatti $\operatorname{Ch} z$ è una funzione pari e $\operatorname{Sh} z$ una funzione dispari. Valgono poi le seguenti relazioni:

$$\boxed{\underbrace{\begin{matrix} \operatorname{Ch}(iz) = \cos(z) \\ \cos(iz) = \operatorname{Ch}(z) \end{matrix}}_{\text{"sparisce la } i\text{"}} \qquad \underbrace{\begin{matrix} \operatorname{Sh}(iz) = i \operatorname{sen}(z) \\ \operatorname{sen}(iz) = i \operatorname{Sh}(z) \end{matrix}}_{\text{"esce fuori la } i\text{"}}}$$

Logaritmo complesso:

$$\boxed{\ln(z) = \ln(|z|) + i(\arg(z) + 2\pi n) \quad n \in \mathbb{Z}}$$

Radici complesse:

$$z^n = w, \quad \begin{matrix} z = \rho e^{i\theta} \\ w = r e^{i\varphi} \end{matrix} \rightsquigarrow \rho^n e^{in\theta} = r e^{i\varphi}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} = r^{1/n} \\ n\theta = \varphi + 2k\pi \end{cases} \rightsquigarrow \theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, \dots, n-1$$

# ANALISI COMPLESSA

$f: A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C} \iff f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, perché

$$f(z) = f(x+iy) = \underbrace{u(x,y)}_{Re(f(z))} + i \underbrace{v(x,y)}_{Im(f(z))}$$

Derivabilità: $\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z)$, se $\exists$

il limite va pensato come limite in due variabili, $h = a + ib$ con $a \to 0$ e $b \to 0$

Differenziabilità: $f(z+h) = f(z) + f'(z)h + o(|h|)$ per $h \to 0$

Qui derivabilità $\iff$ differenziabilità.

E diremo che $f$ è olomorfa su $A$, $f \in H(A)$, se è derivabile $\forall z \in A$. Mentre intera se $f$ è definita su tutto $\mathbb{C}$.

Derivate direzionali: $v \in \mathbb{C}$, $\frac{df(z)}{dv} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \in \mathbb{R}}} \frac{f(z+tv) - f(z)}{t} = v f'(z)$ se $\exists$

Eqz di Cauchy - Riemann: sia $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y)$, $f: A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z_0 = x_0 + i y_0 \in A$. Vale che

$f$ è derivabile in $z_0 \in A$ $\iff$ $u$ e $v$ sono differenziabili ($C^1$) in $z_0 = x_0 + i y_0$ e in tale punto verificano le

$$(CR) \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

Inoltre, dalla dim, si ha che

$f'(z_0) = u_x + i v_x |_{z_0}$, $i f'(z_0) = u_y + i v_y |_{z_0}$

In altre forme:

una funzione $u$: $\Delta u = 0$ è detta armonica

$$(CR) \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \iff \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \iff \begin{cases} \rho u_\rho = v_\theta \\ \rho v_\rho = -u_\theta \end{cases} \iff \Delta u = \Delta v = 0$$

$u, v$ scritte con $x, y$ — $u, v$ scritte con $\rho, \theta$

$\Delta$: laplaciano $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$

SERIE DI POTENZE

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ ha raggio di convergenza $R$ dato da

$$R = \frac{1}{L}, \quad L = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} (\sup) \sqrt[n]{|a_n|}$$

convergenza: su $A = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < R \}$ ed eventualmente su $\partial A$, la frontiera di $A$, dove occorre studiare a mano quel che accade

conv. unif.: su $B = \{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq R' < R \}$

L'idea è che per estendere funzioni reali $f(x)$ a funzioni complesse $f(z)$ vorremo riuscire a scrivere $f(x)$ in serie di potenze.

# CURVE IN $\mathbb{C}$

Una curva in $\mathbb{C}$ è una funzione continua $\gamma: [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.
È chiusa se $\gamma(a)=\gamma(b)$, è regolare se $\gamma'(t) \neq 0 \ \forall t \in [a,b]$.
Data $f: A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f \in C^0(A)$, $\gamma: [a,b] \to A$ una curva regolare, l'integrale di linea di $f$ su (lungo) $\gamma$ è dato da

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt$$

valgono sempre le linearità ($\int f+g = \int f + \int g$, $\int kf = k\int f$) e poi:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = -\int_{\gamma,\ \text{percorsa in senso opposto}} f(z)\,dz$$

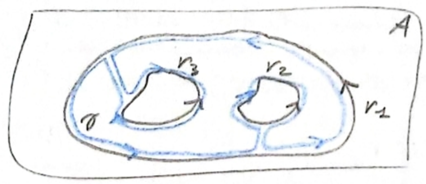
$$\left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| \leq \int_\gamma |f(z)|\,ds, \quad ds = |\gamma'(t)|\,dt$$

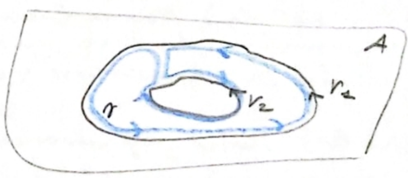
Teorema (Integrale nullo di Cauchy). Sia $A \subset \mathbb{C}$ semplicemente connesso ($\Leftrightarrow$ interno a una curva), $f \in H(A)$. Allora $\forall \gamma: [a,b] \to A$ curva chiusa vale che

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$


Se $\gamma$ è proprio la curva che racchiude $A$, vale ancora il teorema, cioè $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ ancora, ma serve che $f \in H(A) \cap C^0(\bar{A})$.

Idea del teorema: usarlo quando si hanno più curve, creandone una chiusa che passi per tutte, e dal teorema si ricavano rel. tra esse




$$\int_\sigma = \int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2} - \int_{\gamma_3} \qquad\qquad \int_\sigma = \int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2}$$

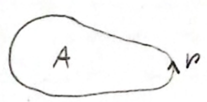
ma $\int_\sigma = 0$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} = \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} \qquad\qquad \Rightarrow \int_{\gamma_1} = \int_{\gamma_2}$$

} l'$\int$ su una curva è = all'$\int$ su un'altra curva ottenuta deformandola con continuità

Teorema (Formula di Cauchy). Sia $\gamma: [a,b] \to A \subset \mathbb{C}$, con $A$ la regione interna alla curva, e sia $f \in H(A) \cap C^0(\bar{A})$. Allora

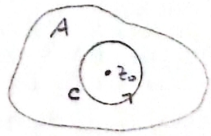
$$\forall z \in A \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$




Teorema (di Weierstrass). Sia $A \subset \mathbb{C}$ (aperto come sempre), $f \in H(A)$. Allora $f$ si può scrivere localmente, nell'intorno di ogni punto $z_0 \in A$, con la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{dove}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw$$




e $c$ è una qualunque circonferenza di centro $z_0$ interna ad $A$
(anche non per forza circonferenza, quella è per comodità)

Inoltre derivando per serie si ricava che
$f^{(n)}(z_0) = n!\, a_n$

SINGOLARITA'
Abbiamo ora a che fare con $f \in H(A \setminus \{z_0\})$, cioe' con $f$ non definita in un certo punto, e tale pto $z_0$ e' detto singolarita'. Ora $f$ riesce comunque a essere scritta intorno a $z_0$ ma in

Serie di Laurent : $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$

con gli $a_n$ ancora calcolabili con $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw$

Le singolarita' si possono classificare in
(1) Sing. eliminabile, se
$a_n = 0 \ \forall n < 0 \iff \exists$ finito $(\in \mathbb{C})$ $\lim_{z \to z_0} f(z)$
$\iff f$ si mantiene limitata in un $U(z_0)$

(2) Polo, di ordine $h$ (o $h$-polo), se
conta solo esce $\infty$, cioe' va bene anche $+\infty$ a $z_0^+$ e $-\infty$ a $z_0^-$ per es.
$\exists N < 0 : a_n = 0 \ \forall n < N \iff \exists \lim_{z \to z_0} f(z) = \pm\infty \iff \exists \lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$
L'ordine $h$ del polo e' pari a $-N$, e se si presentano nella forma $\frac{1}{(z-z_0)^h}$ $\Rightarrow$ polo di ordine $h$: annulla $h$ volte il denominatore, ma non il num (e' uno zero di molteplicita' $h$ per il den)

(3) Sing. essenziale, se
$\exists \infty\, n < 0 : a_n \neq 0 \iff \nexists \lim_{z \to z_0} f(z)$ {esempio: $e^{(1/(z-1))}$ che per $z \to 1^{+-}$ tende a $+\infty$ e $0$ $\Rightarrow \nexists$ lim, come al solito}
$\iff \forall \varepsilon > 0$ l'insieme $f(0 < |z-z_0| < \varepsilon)$ e' denso in $\mathbb{C}$ quindi

Thm. (sing. eliminabili) Sostanzialmente sono come le discontinuita' eliminabili di analisi 1, ma qui la $f$ si puo' estendere in modo che sia olomorfa (condizione piu' potente della continuita')

Thm. (sing. polo) Sono equivalenti le aff.:
$f$ ha un $n$-polo in $z_0 \iff g(z) = (z-z_0)^n f(z)$ ha una sing. eliminabile in $z_0$
$\iff |f(z)| \underset{z \to z_0}{\sim} \frac{1}{|z-z_0|^n} \iff \frac{1}{f(z)}$ ha uno zero di ordine $n$ in $z_0$ (cioe' parte come $a_n z^n + \dots$)

Thm. (sing. essenziali) Sono un po' imprevedibili, se $z_0$ sing. es. per $f$, allora qualunque numero complesso e' (ottenibile come) valore limite di $f(z)$ per $z \to z_0$.

Per $z_0$ una singolarita', una volta scritta $f$ in serie di Laurent intorno a $z_0$, $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$, quindi $f \in H(A \setminus \{z_0\})$, definiamo residuo di $f$ in $z_0$ il coeff $a_{-1}$ di tale serie, e lo indichiamo con $\text{Res}(f, z_0)$.

vale che $\text{Res}(f, z_0) = a_{-1} \Big|_{\sum a_n (z-z_0)^n} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)\, dz \Big|_{z_0 \in \mathring{C}}$

Mentre, sia $R > 0$ e $f \in H(|z| > R)$, e $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ il suo sviluppo di Laurent in un intorno di $\infty$.
Definiamo il residuo di $f$ all'$\infty$ come

$$\text{Res}(f, \infty) = -a_{-1} \Big|_{\sum a_n z^n} = -\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\gamma} f(z)\, dz \Big|_{\gamma \text{ come detto dopo } (\to)}$$

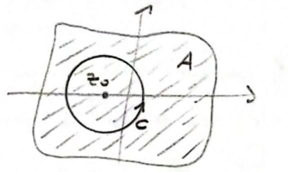
dove $\gamma$ e' una circonferenza di raggio $\rho > R$ centrata nell'origine, in modo che tutte le eventuali singolarità di $f$ al finito siano interne ad essa.
Dunque:

- singolarita' $z_0$ al finito, $f \in H(A \setminus \{z_0\})$

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)\, dz$$

coeff della serie scritta centrata in $z_0$: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$

C circonferenza intorno a $z_0$ (o altre curve tali che $z_0$ ne sia interno)

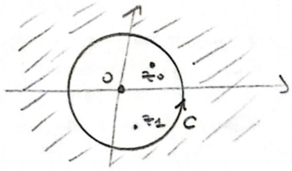



- singolarita' all'$\infty$, $f \in H(|z| > R)$

$$\mathrm{Res}(f, \infty) = -a_{-1} = -\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)\, dz$$

- coeff della serie, scritta intorno a $\infty$: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$

C circonferenza di raggio $\rho > R$, col (-) fuori o no a seconda del verso in cui la percorriamo




Scritta $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ valida in $U(\infty)$, anche le singolarità $\infty$ si può classificare:

- eliminabile se
  $a_n = 0 \ \forall n > 0 \iff \exists$ finito $\lim_{z \to \infty} f(z)$
- polo se
  $\exists N > 0 : a_n = 0 \ \forall n > N \iff \exists \lim_{z\to\infty} f(z) = \pm\infty$
- essenziale se
  $\exists \infty\, n > 0 : a_n \neq 0 \iff \nexists \lim_{z \to \infty} f(z)$

il $\lim_{z\to\infty}$ si calcola mandando
- $\rho \to +\infty$ $\forall\theta$ se $z = \rho e^{i\theta}$
- $a \to \pm\infty$, $b \to \pm\infty$ se $z = a + ib$

Teorema (dei Residui) Sia $f \in H(A \setminus \{z_1, \dots, z_n\})$, $A \subset \mathbb{C}$ un aperto semplicemente connesso e $\gamma$ la curva che delimita $A$. E anche $f$ olomorfa nella regione esterna ad $A$ tranne in qualche punto $z_{n+1}, \dots, z_m$. Allora, vale che

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \left[ \sum_{int} \mathrm{Res}(f, z_k) \right] =$$

$\gamma$ percorso in senso antiorario

$$= -2\pi i \left[ \sum_{est} \mathrm{Res}(f, z_k) + \mathrm{Res}(f, \infty) \right]$$

Corollario: $\sum_{int} \mathrm{Res}(f, z_k) = -\sum_{est} \mathrm{Res}(f, z_k) - \mathrm{Res}(f, \infty)$

$$\sum_{int} \mathrm{Res}(f, z_k) + \sum_{est} \mathrm{Res}(f, z_k) + \mathrm{Res}(f, \infty) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{\forall k} \mathrm{Res}(f, z_k) + \mathrm{Res}(f, \infty) = 0$$

che vale $\forall$ funzione $f$ olomorfa in $\mathbb{C}$ tranne al più un numero finito di punti $z_k$.

CALCOLO DEI RESIDUI

Si potrebbe, per calcolare il residuo di $f$ in un pto, determinare la serie di Laurent associata e ricavarne il coeff $a_{-1}$.
Però ci sono un insieme di accorgimenti:

- se $z_0 \neq \infty$ e' una sing. eliminabile (o un punto regolare) per $f$
  $\Rightarrow Res(f, z_0) = 0$

Può invece non essere così per $\infty$ (infatti è specificato $z_0 \neq \infty$).

- se $\infty$ e' uno zero di ordine $\geq 2$ *
  $\Rightarrow Res(f, \infty) = 0$
- se $\infty$ e' un 1-polo* $\Rightarrow Res(f,\infty) = -\lim_{z\to\infty} z f(z) \neq 0$
- se $z_0$ e' un 1-polo, e $f(z)$ e' nella forma $f = h/g$

  $\Rightarrow Res(f, z_0) = \dfrac{h(z_0)}{g'(z_0)}$    se k-polo $\Rightarrow$ $Res = \dfrac{h^{(k-1)}(z_0)}{g^{(k)}(z_0)/k!}$

Il caso precedente e' un caso particolare di questa regola.

- se $z_0 \neq \infty$ e' un n-polo

  $\Rightarrow Res(f, z_0) = \dfrac{1}{(n-1)!} \; D_{n-1}\Big[\underbrace{(z-z_0)^n f(z)}_{\text{così ora } z_0 \text{ diventa una sing. eliminabile}}\Big]\Big|_{z\to z_0}$
- se $z_0 = \infty$ e' utile la formula

  $Res(f, \infty) = -Res\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$
- in generale per le sing. difficili il loro residuo si ricava prima calcolando gli altri e poi da

  $$\sum_{\forall z_n} Res(f, z_n) + Res(f, \infty) = 0$$

* $\infty$ e' un h-polo se

$$f(z) \underset{z\to+\infty}{\sim} z^h \xrightarrow[z\to+\infty]{} +\infty \text{ infatti}$$

mentre $\infty$ e' uno zero di ordine $h$ se

$$f(z) \underset{h\to+\infty}{\sim} \frac{1}{z^h} \xrightarrow[z\to+\infty]{} 0 \quad (\Rightarrow \infty \text{ e' una sing. eliminabile})$$

- se $f$ e' una funzione pari $\Rightarrow Res(f, 0) = 0$

  perché' essendo pari la sua serie di Laurent in $z=0$ e' $\sum a_{2m} z^{2m}$, cioe' ha solo $z^k$ con $k$ pari, quindi $a_{-1} = 0$ perché non c'e' proprio $z^{-1}$

Comunque le singolarità non isolate sono quando abbiamo $z_0$ singolarità per $f$ tale che ogni intorno di $z_0$ ha almeno un'altra singolarità oltre a lui.
Esempio:

$f(z) = \dfrac{1}{sen(\frac{1}{z})}$    ha singolarità in $\frac{1}{z} = k\pi \Rightarrow z_k = \frac{1}{k\pi} \quad k \in \mathbb{Z}$
e anche in $z_0 = 0$

ma $\forall\, \mathcal{U}(z_0 = 0) \; \exists \bar{k} : z_{\bar{k}} = \frac{1}{\bar{k}\pi} \in \mathcal{U}(0)$

SERIE UTILI:

$$\frac{1}{1-w} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} w^n, & |w| < 1 \\ -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{w^{n+1}}, & |w| > 1 \end{cases} \qquad (1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$$

~ ESERCITAZIONI ∪ LEZIONI ~

# CALCOLO DI INTEGRALI REALI CON METODI COMPLESSI

$R(\cdot)$ intende una funzione razionale (anche fratta)

$$\left[ R(u) = \frac{1}{3+u},\quad R(u) = \frac{u^2}{2+u^4},\quad R(u) = \frac{2}{1+u^3},\ \dots \right]$$

**1** $R = R(x,y)$ definita su $\{x^2+y^2=1\}$, scritta con $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$.

$$\boxed{\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\, d\theta} = \left\{ \begin{array}{l} z = e^{i\theta} \Rightarrow dz = i e^{i\theta} d\theta \\ \qquad\qquad\quad d\theta = \frac{1}{iz}\, dz \\ \cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) \\ \operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right) \end{array} \right\}$$

$$= \int_\gamma R(\dots)\, \frac{1}{iz}\, dz$$

dove $\gamma(t) = e^{it}$ $t|_0^{2\pi}$, la circonferenza unitaria $|z|=1$

E quell'$\int$ lo calcoliamo con la teoria dei residui:

$$\int_{\gamma_R} = 2\pi i \sum_{int} Res$$

$$\left[ \int_0^{2\pi} \frac{1}{3+\operatorname{sen}\theta}\, d\theta,\quad R(\theta) = \frac{1}{3+\operatorname{sen}\theta} \right]$$

per esempio

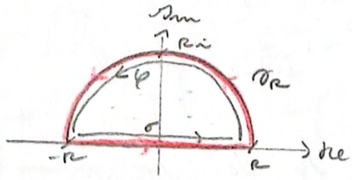
**2**

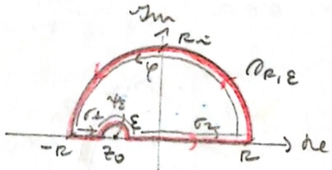
$$\boxed{\begin{array}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\, dx \\ \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cdot \left\{ \begin{array}{c} e^{ix} \\ \cos x \\ \operatorname{sen} x \end{array} \right\} dx \end{array}}$$

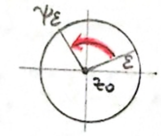
$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\, dx \rightsquigarrow$ poniamo $f(z) = R(z)$

$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cdot \{e^{ix}, \cos x, \operatorname{sen} x\}\, dx \rightsquigarrow$ poniamo $f(z) = R(z)\, e^{iz}$

E si integra su semicerchi fatti così: (o eventualmente con mezzo se ci sono poli sull'asse reale:)




$$\int_{\gamma_R} = \int_\varphi + \int_\sigma \qquad \begin{array}{l} \varphi(t) = Re^{it} \\ t\in[0,\pi] \\ \sigma(t) = t \\ t \in [-R,R] \end{array}$$

$$\int_{\gamma_{R,\varepsilon}} = \int_\varphi + \int_{\sigma_1\cup\sigma_2} + \int_{\psi_\varepsilon}$$

e poi si manda $R \to +\infty$.

Aspettatine:

$\int_\varphi \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$

$\int_\sigma$ o $\int_{\sigma_1\cup\sigma_2} \xrightarrow[R\to+\infty]{} I$

$\int_{\psi_\varepsilon}$ : usiamo Jordan (con attenzione al segno)

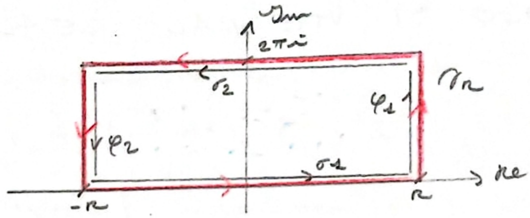
Lemma di Jordan: se $f \in H(D_{z_0,R} \setminus \{z_0\})$ con $z_0$ 1-polo vale che
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\psi_\varepsilon} f = (\beta-\alpha)\, i\, Res(f, z_0)$$
(con $\psi_\varepsilon$ percorsa in s. antiorario)

Quindi si calcola prima $\int_{\gamma_R} = 2\pi i \sum Res(f, .)$ e poi si scompone $\gamma$ nelle varie curve e riordinando i termini si ricava $\int_\sigma$ o $\int_{\sigma_1\cup\sigma_2}$

$$\left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{x^h}{a^2+x^{2h}}}_{R(x)}\, dx,\quad \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{R(x)\operatorname{sen} x}\, dx \rightsquigarrow f(z) = \frac{1}{z} e^{iz} \right]$$

[3] $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} R(e^x)\cdot\left\{\frac{1}{e^{ix}}\right\} dx}$ ⇝ $f(z)=R(e^z)\,e^{iz}$

E si integra su rettangoli (sempre eventualmente con morsi):
e si manda $R\to+\infty$.
Calcoliamo




$$\int_{\gamma_R} = 2\pi i \sum Res$$

$$\int_{\gamma_R} = \int_{\sigma_1}+\int_{\sigma_2}+\int_{\varphi_1}+\int_{\varphi_2}$$

Aspettative:
$\int_{\sigma_1}, \int_{\sigma_2} \xrightarrow{R\to+\infty} kI$
$\int_{\varphi_1}, \int_{\varphi_2} \xrightarrow{R\to+\infty} 0$

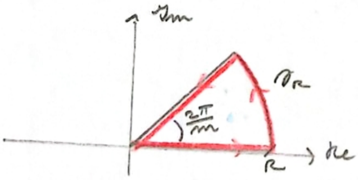
[ $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{\cosh x}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{\cosh x}\,dx = \frac{1}{2}\,Re\,J$, $J=\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\frac{e^{ix}}{\cosh x}}_{R(e^x)=\frac{1}{\cosh x}}\,dx$ ]

occhio sempre al trucco della parità

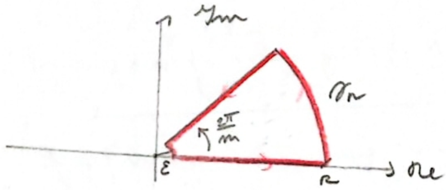
[4] $\boxed{\int_0^{+\infty} x^\alpha\cdot R(x^m)\,dx}$, $\alpha\in\mathbb{R},\ m\in\mathbb{N},\ m\geq 2$

Si integra la funzione $f(z)=e^{\alpha Log(z)}\cdot R(z^m)$

- se $\alpha\in\mathbb{N}$:



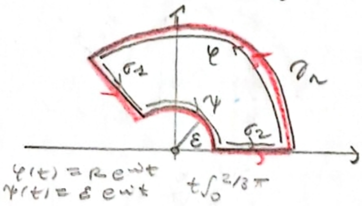

- se $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{\mathbb{N}\}$




[ $I=\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{1+x^3}\,dx$, $\alpha\in\mathbb{R}$ ⇝ $f(z)=e^{\alpha Log(z)}\frac{1}{1+z^3}$

$R(x^m)=\frac{1}{1+x^3}$
$\Longrightarrow m=3$

$\sigma_2(t)=t=te^{i0}$ $t\int_\varepsilon^R$
$\sigma_1(t)=te^{i2/3\pi}$ $t\int_R^\varepsilon$



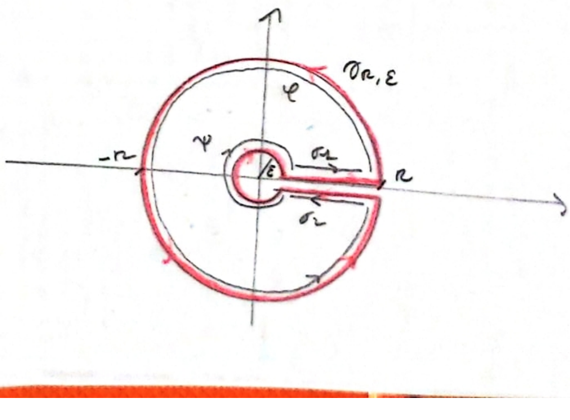

$\varphi(t)=Re^{it}$
$\psi(t)=\varepsilon e^{it}$ $t\int_0^{2/3\pi}$

$\int_{\gamma_R}=\int_\varphi+\int_{\sigma_1}+\int_\psi+\int_{\sigma_2}$
$\sigma_1,\sigma_2 \longrightarrow I$
$\varphi,\psi \longrightarrow 0$ ]

[5] $\boxed{\begin{array}{l}\int_0^{+\infty} x^\alpha\cdot R(x)\,dx,\ \alpha\neq 0\\ \int_0^{+\infty} R(x)\,dx\\ \int_0^{+\infty} \ln x\cdot R(x)\,dx\end{array}}$

⇝ $f(z)=e^{\alpha \log z}\cdot R(z)$
⇝ $f(z)=\log z\cdot R(z)$
⇝ $f(z)=(\log z)^2\cdot R(z)$

E si integra su:
mandando poi $R\to+\infty$




$$\int_{\gamma_R} = 2\pi i\sum Res$$

$$\int_{\gamma_R}=\int_{\sigma_1}+\int_\varphi+\int_{\sigma_2}+\int_\psi$$

[ $I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx$ ]

# SPAZI $L^p$ E CONVERGENZA

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ misurabile. Per $1 \leq p < +\infty$, $p \in \mathbb{R}$, definiamo:

$$L^p(A) = \{ f : A \to \mathbb{R} \mid f \text{ misurabile}, \ \underbrace{|f|^p \in L^1(A)}_{} \}$$

$\Leftrightarrow \int_A |f(x)|^p dx < +\infty$, converge

Per $p = +\infty$, definiamo:

$$L^\infty(A) = \{ f : A \to \mathbb{R} \mid f \text{ misurabile}, \ \operatorname*{ess\,sup}_{x \in A} |f(x)| < +\infty \}$$

Riguardo alle norme:

$$\| f \|_{L^p(A)} = \left( \int_A |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

$$\| f \|_{L^\infty(A)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in A} |f(x)| = \inf M \ : \ M \in [0, +\infty) ,\ |f(x)| \leq M \text{ per quasi ogni } x \in A$$

$\Rightarrow$ $M$ è il valore tc la funzione $|f(x)|$ è $\leq$ di lui quasi ovunque

($\Rightarrow$ circa il max assunto da $|f(x)|$)

CONVERGENZA

- in $L^p(A)$ con $p \in [1, +\infty)$:

$$f_n \xrightarrow{L^p(A)} f \iff \underbrace{\| f_n - f \|_{L^p(A)}}_{} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

e se $f_n \in L^p$ e anche $f \in L^p$

calcoliamo cioè $\int_A |f_n(x) - f(x)|^p dx$, con $n$ fissato, poi (elevando alla $1/p$ ma è superfluo) vedere se va a 0 per $n \to +\infty$

- in $L^\infty(A)$:

$$f_n \xrightarrow{L^\infty(A)} f \iff \underbrace{\| f_n - f \|_{L^\infty(A)}}_{} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

e se $f_n \in L^\infty$ e anche $f \in L^\infty$

qui calcoliamo l'$\operatorname*{ess\,sup}_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|$ e poi come prima

- uniformemente: (come al solito, dalla conv. totale)

$$f_n \xrightarrow{unif} f \iff \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

TCD (THM CONV. DOMINATA)

Sia $\{f_n\} \subset A$ succ. di fun. misurabili, con $A$ misurabile $\subset \mathbb{R}$. Se $f_n \to f$ q.o. in $A$ per $n \to +\infty$, e se $\exists g \in L^1(A) : |f_n(x)| \leq g(x)$ $\forall n$ e $\forall x$ (q.o. $x$) $\in A$, allora

(1) $f \in L^1(A)$

(2) $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_A f_n = \int_A \lim_{n \to +\infty} f_n = \int_A f$

Per trovare $g(x)$ che domini le $f_n$:

- deve valere $|f_n(x)| \leq g(x)$ < $\forall n (\geq 1)$ per cui le $f_n \in L^1(A)$; per q.o. $x \in A$

- non deve dipendere da $n$, e quindi ci ricavo le $n$ si metta "la prima che va bene"

# SERIE DI FOURIER

## SPAZI DI HILBERT E $\ell^2$

Definiamo **spazio di Hilbert** uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare e completo rispetto alla norma da lui indotta.

Definiamo **spazio $\ell^2$** lo spazio vettoriale delle successioni

- (su $\mathbb{R}$) $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ tali che $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^2$ converge.
  Il prod. scalare e' dato da $(x \cdot y) = \sum x_n y_n$, $\forall x = \{x_n\}, y = \{y_n\} \in \ell^2$
- (su $\mathbb{C}$) $\{x_n\} \subset \mathbb{C}$ tali che $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2$ converge.
  Il prod. scalare e' dato da $(x \cdot y) = \sum x_n \bar{y}_n$, $\forall x = \{x_n\}, y = \{y_n\} \in \ell^2$

$L^p$ e $\ell^p$ sono spazi di Banach $\forall p \in [1, +\infty]$.
Solo $L^2$ e $\ell^2$ sono anche spazi di Hilbert.

Dato $H$ spazio di Hilbert con $\dim H = +\infty$, chiamiamo **base hilbertiana completa** un insieme (infinito) di vettori che formino una base ortonormale, cioe' un insieme di elementi $\{e_n\} \subset H$, $n \in \mathbb{N}$, tale che

(1) $(e_i \cdot e_j) = \delta_{ij}$

(2) $\forall u \in H \quad \exists \{c_n\}, n \in \mathbb{N} : \quad u = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e_n$

Quindi ogni spazio di Hilbert $H$ dotato di base hilbertiana e' isomorfo a $\ell^2$:

$u \in H$ (con base $\{e_n\}$) $\leftrightarrow$ $c = \{c_n\} \in \ell^2$, $\quad \|u\|_H^2 = \|c\|_{\ell^2}^2$

## SERIE DI FOURIER

Lavoreremo su $L^2(\Omega)$, con **prodotto scalare** e **norma** indotta date ($\forall f, g \in L^2(\Omega)$) da:

$$(f \cdot g)_{L^2} = \int_\Omega f(x) \cdot g(x)\, dx \qquad \|f\|_{L^2}^2 = \int_\Omega |f(x)|^2\, dx$$

$L^2(\Omega)$, dove come utilizzeremo $\Omega = (-T/2, T/2)$, e' uno spazio di Hilbert e $\left\{ \frac{1}{\sqrt{T}}, \dots, \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right), \sin\left(\frac{2\pi n}{T} x\right), \dots \right\}$ formano una base hilbertiana.

Quindi, $\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione $T$-periodica e $\in L^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ possiamo definire la sua **serie di Fourier** associata:

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T} x\right)$$

dove calcoliamo così i coefficienti:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) dx \qquad \left[ a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, dx \right]$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) dx \qquad [\, b_0 = 0 \,]$$

- $f$ pari $\Rightarrow$ $b_n = 0 \quad \forall n$
- $f$ dispari $\Rightarrow$ $a_n = 0 \quad \forall n$

Una funzione $f \notin L^2$ non si può scrivere in serie di Fourier. Quindi per rispondere a "$f(x) = \dots$ ammette serie di Fourier" va controllato se quella $f(x)$ è $L^2$ sull' $\Omega$ considerato.

CONVERGENTE
Definiamo $\Omega = (-T/2, T/2)$

- $f \in L^2(\Omega) \Rightarrow F(x) \xrightarrow{L^2} f(x)$ in $L^2(\mathbb{R})$
- $\sum (a_n^2 + b_n^2)$ converge $\Rightarrow F(x) \xrightarrow{L^2} f(x)$ in $L^2(\mathbb{R})$
- $f \in L^2(\Omega)$ ed è regolare $\Rightarrow$ $F(x) \to f(x)$ puntualmente su $\mathbb{R}$
  Cioè $\exists\, S(x)$ la somma della serie, e:
  - $S(x) = f(x)$ $\forall x$ dove $f$ è continua
  - $S(x) = \dfrac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$ $\forall x_0$ pto di discontinuità di $f$

- $\sum (|a_n| + |b_n|)$ converge $\Rightarrow F(x) \to f(x)$ unif. su $\mathbb{R}$
- $f \in L^2(\Omega)$ ed è regolare e $C^1$ a tratti $\Rightarrow$ $F(x) \to f(x)$ unif. nei tratti (intervalli) in cui $f$ è $C^1$
- $\sum n^m (|a_n| + |b_n|)$ converge e $f \in C^0(\Omega)$ $\Rightarrow$ $f \in C^m(\Omega)$ e c'è convergenza unif. anche tra le derivate:
  $F^{(j)}(x) \to f^{(j)}(x)$ unif. $\forall j$
- $a_n, b_n \downarrow 0$, cioè $a_n, b_n > 0$ $\forall n$ e tendono in modo monotono a 0 $\Rightarrow$ $F(x) \to f(x)$ puntualmente su $\mathbb{R}$
- $f \in L^2(\Omega) \iff F \in L^2(\Omega)$

( •: criteri da usare se si conosce solo la serie, cioè se sono noti solo $a_n$ e $b_n$
•: criteri da usare se è nota anche $f(x)$ )

CALCOLO DI SERIE NUMERICHE
Identità di Parseval:

$$\|f\|_{L^2}^2 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Idea per calcolare serie numeriche usando le serie di Fourier: usare il fatto che la (somma della) serie $F(x)$ converge a $f(x)$. Quindi si sceglie un $\bar{x}$ utile per rendere la $F(\bar{x})$ simile alla serie numerica che ci interessa, e poi le poniamo uguale alla $f(\bar{x})$. In altri casi si sfrutta Parseval o la decomposizione

$$\sum_{\text{tutti gli } n} = \sum_{n \text{ pari}} + \sum_{n \text{ dispari}}$$

Convergenza uniforme $\Rightarrow$ conv. puntuale e in $L^2$

Convergenza uniforme $\iff$ convergenza in $L^\infty$

# DISTRIBUZIONI

## OPERATORI LINEARI

Siano $X_1, X_2$ due spazi di Banach (o anche solo vettoriali e normati)

Sia $L: X_1 \to X_2$

- $L$ è limitato se: $\exists C \in [0, +\infty): \forall x \in X_1 \quad \|Lx\|_{X_2} \leq C \cdot \|x\|_{X_1}$
- $L$ è continuo se: $\forall \{x_n\} \subset X_1: x_n \to x \in X_1 \Rightarrow Lx_n \to Lx$ in $X_2$

Con $L$ definito tra spazi normati vale che continuo $\Leftrightarrow$ limitato.

Con $X$ spazio di Banach e ($\dim X = +\infty$) $L: X \to \mathbb{R}$, chiameremo $L$ come funzionale lineare. E chiameremo $X'$ spazio duale di $X$ l'insieme dei funzionali lineari continui ($\Leftrightarrow$ limitati qui) su $X$. (anche $X'$ è uno spazio di Banach)

## SPAZI DI FUNZIONI TEST

Definiamo supporto di una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la chiusura dell'insieme delle $x$ per cui $f$ non si annulla:

$$\text{suppt}\, f = \overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}}$$

Una funzione ha supporto compatto se suppt $f$ è un insieme chiuso e limitato contenuto in $\mathbb{R}$.

Definiamo $D(\mathbb{R})$ l'insieme delle funzioni test su $\mathbb{R}$, l'insieme delle funzioni $C^\infty$ a supporto compatto:

$$D(\mathbb{R}) = \{ \varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}),\ \text{suppt}\, \varphi \text{ compatto} \subset \mathbb{R} \}$$

(Convergenza in $D(\mathbb{R})$). Sia $\{\varphi_n\} \subset D(\mathbb{R})$. Diremo che

$\varphi_n \to \varphi$ in $D(\mathbb{R})$ $\Leftrightarrow$ (1) $\exists$ un compatto $K \subset \mathbb{R}$ tale che suppt $\varphi_n \subset K \quad \forall n$

(2) $\varphi_n^{(j)} \to \varphi^{(j)}$ uniformemente $\forall j \in \mathbb{N}$, cioè

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi_n^{(j)} - \varphi^{(j)}| \xrightarrow{n \to +\infty} 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

Definiamo così la nozione di convergenza perché si può definire una norma ma non è utile (potente).

Una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è detta a decrescenza rapida se $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $x^k f^{(j)}(x) \xrightarrow{x \to \pm\infty} 0 \quad \forall k, j \in \mathbb{N}$

Definiamo $S(\mathbb{R})$ lo spazio di queste funzioni, o anche detto spazio di Schwartz. Quindi

$$S(\mathbb{R}) = \{ \varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}),\ \varphi \text{ sia a decrescenza rapida} \}$$

non è quindi più richiesto che siano a supporto compatto

(Convergenza in $S(\mathbb{R})$). Sia $\{\varphi_n\} \subset S(\mathbb{R})$. Diremo che

$\varphi_n \to \varphi$ in $S(\mathbb{R})$ $\Leftrightarrow$ $x^k \varphi_n^{(j)} \to x^k \varphi^{(j)}$ uniformemente (cioè in $L^\infty$) $\forall k, j \in \mathbb{N}$

## DISTRIBUZIONI

Una distribuzione $u$ è un operatore che ad ogni funzione test $\varphi$ ($\in D(\mathbb{R})$ o $\in S(\mathbb{R})$) associa un valore ($\in \mathbb{R}$ o $\in \mathbb{C}$) detto dualità, dato da

$$\langle u, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} u(x)\, \varphi(x)\, dx$$

tali che sia
- lineare: $\langle u, \alpha\varphi + \beta\psi\rangle = \alpha\langle u,\varphi\rangle + \beta\langle u,\psi\rangle \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R} \quad \forall \varphi,\psi$ f. test
- continuo: $\varphi_n \to \varphi$ in $D(\mathbb{R})$ o $S(\mathbb{R}) \Rightarrow \langle u,\varphi_n\rangle \to \langle u,\varphi\rangle$

Chiameremo spazio delle distribuzioni lo spazio $D'(\mathbb{R})$, il duale di $D(\mathbb{R})$. Mentre chiameremo spazio delle distribuzioni temperate lo spazio $S'(\mathbb{R})$, il duale di $S(\mathbb{R})$.

Una cosa vale che: $S(\mathbb{R}) \supset D(\mathbb{R}) \Rightarrow S'(\mathbb{R}) \subset D'(\mathbb{R})$.
Ogni distribuzione (funzionale) su $S'(\mathbb{R})$ lo sarà anche su $D'(\mathbb{R})$, mentre il viceversa non si detto.
Vale inoltre che:

$$D(\mathbb{R}) \subset S(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \subset S'(\mathbb{R}) \subset D'(\mathbb{R})$$

(Convergenza di distribuzioni) *1

$$\Lambda_n \to \Lambda \text{ in } D'(\mathbb{R}) \iff \forall \varphi \in D(\mathbb{R}) \quad \langle \Lambda_n,\varphi\rangle \to \langle \Lambda,\varphi\rangle$$
$$\Lambda_n \to \Lambda \text{ in } S'(\mathbb{R}) \iff \forall \varphi \in S(\mathbb{R}) \quad \langle \Lambda_n,\varphi\rangle \to \langle \Lambda,\varphi\rangle$$

Definiamo $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ lo spazio delle funzioni integrabili su qualunque compatto $\subset \mathbb{R}$:

$$L^1_{loc}(\mathbb{R}) = \left\{ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \;/\; \forall \text{ compatto } K\subset\mathbb{R},\ f \in L^1(K) \text{ cioè } \int_K |f(x)|\,dx < +\infty \right\}$$

(Convergenza in $L^1_{loc}(\mathbb{R})$). Sia $\{f_n\} \subset \mathbb{R}$. Diremo che

$$f_n \to f \text{ in } L^1_{loc}(\mathbb{R}) \iff f_n \to f \text{ in } L^1(K)\ \forall \text{ compatto } K\subset\mathbb{R}, \text{ cioè } \int_K |f_n(x) - f(x)|\,dx \to 0 \ \forall \text{ compatto } K \subset \mathbb{R}$$

ESEMPI DI DISTRIBUZIONI

A ogni funzione $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ possiamo associare una distribuzione in $D'(\mathbb{R})$.
$\forall f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \longmapsto \Lambda_f \in D'(\mathbb{R})$, la distribuzione definita da:

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}) \quad \langle \Lambda_f, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

Quindi tutte le funzioni localmente integrabili (per questo storie come $\mathrm{sgn}(x)$ o $H(x)$ o la f. di Dirichlet) sono associabili a una distribuzione.

$\forall f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ la distribuzione $\Lambda_f$ associata è sempre $\in D'(\mathbb{R})$. È anche una distribuzione temperata, cioè $\in S'(\mathbb{R})$, solo se "$f$ non diverge troppo in fretta". Cioè:

$\forall f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ $\quad \Lambda_f \in D'(\mathbb{R})$ sempre
$\quad \Lambda_f \in S'(\mathbb{R}) \iff |f(x)| \leq C\cdot|x|^k$ per qualche $c, k$ e $\forall |x| >$ una qualche $\bar{x}$

Un'altra distribuzione fondamentale è la delta di Dirac:

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}) \quad \langle \delta_{x_0}, \varphi\rangle = \varphi(x_0) \qquad \langle \delta, \varphi\rangle = \varphi(0)$$
$$\forall \varphi \in S(\mathbb{R}) \quad \langle \delta_{x_0}, \varphi\rangle = \varphi(x_0) \qquad \langle \delta, \varphi\rangle = \varphi(0)$$

Quindi è una distribuzione sia su $D'(\mathbb{R})$ sia su $S'(\mathbb{R})$.

*1 Usare anche convergenza dominata per dimostrare la convergenza di oggetti dove convergono le $f_n$, allora quando voglio calcolare $\lim_{n\to+\infty} \langle f_n,\varphi\rangle = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi(x)\,dx$ se vedo che dopo aggiustamenti l'integrando è $L^1$ allora posso usare conv. dom. e portare dentro il $\lim_{n\to+\infty}$ all'$\int$.

PROPRIETA' DELLE DISTRIBUZIONI

- Derivata di una distribuzione. Per definire una distribuzione basta solo mostrare come opera su funzioni $\varphi \in D(\mathbb{R})$ o $\in S(\mathbb{R})$. Definiamo derivata della distribuzione $u$ la distribuzione $u'$ tale che

$$\langle u', \varphi \rangle = -\langle u, \varphi' \rangle$$

- Prodotto di una distribuzione per una funzione $C^\infty(\mathbb{R})$. Data $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, definiamo la distribuzione $\psi u$ come la distribuzione data da

$$\langle \psi u, \varphi \rangle = \langle u, \psi \varphi \rangle$$

Tanto in questo modo (con l'hp $\psi \in C^\infty$) si ha ancora che $\psi\varphi \in D(\mathbb{R})$ o $\in S(\mathbb{R})$, se $\varphi \in D(\mathbb{R})$ o $\in S(\mathbb{R})$.

- Comunque, la def di $\langle u, \varphi \rangle$ è (tranne quando la $u$ è $\delta$)

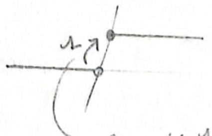
$$\langle u, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} u(x)\, \varphi(x)\, dx$$

Possiamo da queste proprietà estendere l'idea di derivata anche per funzioni con discontinuità. Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e siano $x_i$ $i=1..n$ i punti in cui c'è discontinuità, mentre siano $h, \dots, g$ le funzioni che descrivono l'andamento nei tratti in cui è continua. Allora definiamo derivata di $f$ in questo modo:

$$f'(x) = h'(x)\, \mathbb{1}_h(x) + \dots + g'(x)\, \mathbb{1}_g(x) + \sum_{i=1}^{n} \left( f(x_i^+) - f(x_i^-) \right) \cdot \delta_{(x - x_i)}$$

Es.

$$f(x) = H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$




salto di 1 verso l'alto $\Rightarrow$ $+1 \cdot \delta_0$

$$\Rightarrow f'(x) = 0\, \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x) + 0\, \mathbb{1}_{(-\infty,0)}(x) + (f(0^+) - f(0^-))\, \delta_{(x-0)} = (1-0)\, \delta_0 = \delta_0$$

Comunque, quando studiamo la convergenza di una successione di distribuzioni associate a funzioni $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, non è detto che il limite delle $\Lambda_{f_n}$ sia poi a $\Lambda_f$, dove $f$ è il limite puntuale delle $f_n$. Cioè anche se $f_n \to f$ può accadere che $\Lambda_{f_n} \to \Lambda \neq \Lambda_f$.

$$\xrightarrow{L^\infty(\mathbb{R})} \Rightarrow \xrightarrow{L^1_{loc}(\mathbb{R})} \Rightarrow \xrightarrow{S'(\mathbb{R})} \Rightarrow \xrightarrow{D'(\mathbb{R})}$$

# TRASFORMATA DI FOURIER

Sia $u \in L^1(\mathbb{R})$. Definiamo trasformata di Fourier di $u$ la funzione $\mathcal{F}(u) = \hat{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ data da

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x}\, u(x)\, dx$$

Dove vive $\hat{u}$? Definiamo $C_0^0(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ continue e tali che } \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0 \right\}$

$C_0^0(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$, quindi definiamo come norma per: $\|f\|_{C_0^0} = \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$

Teorema. $u \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{u} \in C_0^0(\mathbb{R})$ e $\|\hat{u}\|_{C_0^0} \leq \|u\|_{L^1}$

$L^1$ e $C_0^0$ sono spazi di Banach. $L^1 \cap C_0^0$ invece non lo e'

Teorema. $D(\mathbb{R})$ e' denso in $L^p(\mathbb{R})$ $\forall p \in [1, +\infty)$.
Cioe' $\forall u \in L^p(\mathbb{R})$ $\exists \{\varphi_n\} \subset D(\mathbb{R}) : \varphi_n \xrightarrow{L^p} u$
$\iff \|\varphi_n - u\|_{L^p} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$

Proprieta' della trasformata:

- linearita': $\mathcal{F}(\alpha u + \beta v) = \alpha \mathcal{F}(u) + \beta \mathcal{F}(v)$ $\quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall u, v \in L^1(\mathbb{R})$
- scaling: $\mathcal{F}(u(ax))(\xi) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}(u)\left(\frac{\xi}{a}\right)$
- shifting: $\mathcal{F}(u(x-a))(\xi) = e^{-ia\xi} \mathcal{F}(u)(\xi)$
- modulazione: $\mathcal{F}(u(x) e^{iax})(\xi) = \mathcal{F}(u)(\xi - a)$

  $\Rightarrow$ possiamo usarla anche su $e^{iax}$ con seni/coseni:

  $$\mathcal{F}(u(x)\cos(ax))(\xi) = \frac{1}{2}\left[\hat{u}(\xi - a) + \hat{u}(\xi + a)\right]$$
  $$\mathcal{F}(u(x)\,\mathrm{sen}(ax))(\xi) = \frac{1}{2i}\left[\hat{u}(\xi - a) - \hat{u}(\xi + a)\right]$$

- simmetrie: $u$ pari $\Rightarrow$ $\hat{u}$ pari
  $u$ dispari $\Rightarrow$ $\hat{u}$ dispari (se $\mathbb{R} \Rightarrow \in \mathbb{R}$) (se $\mathbb{R} \Rightarrow \in \mathbb{C}$ pura)
- derivata della trasformata:
  $u \in L^1(\mathbb{R})$, $x^k u \in L^1(\mathbb{R})$ $(k \geq 1)$ $\Rightarrow$ $\mathcal{F}(u(x))'(\xi) = -i \mathcal{F}(x u(x))(\xi)$ $\quad \hat{u} \in C^k(\mathbb{R})$
- trasformata della derivata:
  $u \in L^1 \cap C^1 \cap C_0^0$, $u' \in L^1$ (se poi $u \in C^n$ allora) $\Rightarrow$
  $\mathcal{F}(u'(x))(\xi) = i\xi\, \mathcal{F}(u(x))(\xi)$
  $\mathcal{F}(u^{(n)}(x))(\xi) = (i\xi)^n \mathcal{F}(u(x))(\xi)$

Teorema (formula di inversione).
Se $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap C_0^0(\mathbb{R})$ allora anche $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}) \cap C_0^0(\mathbb{R})$ e viceversa. E

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x}\, \hat{u}(\xi)\, d\xi$$

Quindi finora la trasformata e' $\mathcal{F} : L^1 \cap C_0^0 \to L^1 \cap C_0^0$

Si può anche estendere come definizione:

- $\mathcal{F}: \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, cioè $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$
- $\mathcal{F}: L^2 \to L^2$, cioè $u \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{u} \in L^2(\mathbb{R})$. Per definire $\hat{u}$ usiamo il fatto che $\mathcal{S}$ è denso in $L^p$ e quindi in $L^2$: troviamo una successione $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tale che $\varphi_n \xrightarrow{L^2} u$, cioè $\|\varphi_n - u\|_{L^2} \to 0$, calcoliamo $\hat{\varphi}_n$ e poniamo

$$\hat{u}(\xi) = \lim_{n \to +\infty} \hat{\varphi}_n(\xi)$$

Vale inoltre il thm di Plancherel.

$$\begin{array}{l} u \in L^2(\mathbb{R}) \text{ o} \\ u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \end{array} \Rightarrow \|u\|^2_{L^2} = \frac{1}{2\pi} \|\hat{u}\|^2_{L^2}$$

$$\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} |u(x)|^2 \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi$$

quindi la trasformata di Fourier è un'isometria tra $L^2$ e $L^2$. Preserva oltre alla norma anche i prodotti scalari:

$$\begin{array}{l} \forall u, v \in L^2(\mathbb{R}) \\ \text{oppure} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \end{array} \Rightarrow (u \cdot v)_{L^2} = \frac{1}{2\pi} (\hat{u} \cdot \hat{v})_{L^2}$$

- $\mathcal{F}: \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$, cioè la trasformata di distribuzioni (solo temperate). La definiamo come:

$$\forall \Lambda \in \mathcal{S}' \quad \hat{\Lambda} \in \mathcal{S}' : \quad \langle \hat{\Lambda}, \varphi \rangle = \langle \Lambda, \hat{\varphi} \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

– convoluzione (ultima proprietà):

$$\begin{array}{l} u \in L^1(\mathbb{R}) \\ v \in L^1(\mathbb{R}) \end{array} \Rightarrow (u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}} u(t) \, v(x-t) \, dt \quad \in L^1(\mathbb{R})$$

$$\widehat{(u * v)}(\xi) = \hat{u}(\xi) \cdot \hat{v}(\xi)$$

TRASFORMATE DI FOURIER FAMOSE

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \longrightarrow \hat{f}(\xi) = \pi e^{-|\xi|}$$

$$f(t) = e^{-x^2} \longrightarrow \hat{f}(\xi) = \sqrt{\pi} \, e^{-\xi^2/4}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{F}(\delta_p) = e^{-ipx} \quad \left( e^{-i\xi x} \big|_{\xi = p} \right) \\ \Rightarrow \mathcal{F}(\delta) = 1 \end{array}\right\} \text{ nel senso delle distribuzioni}$$

# TRASFORMATA DI LAPLACE

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Si dice $\mathcal{L}$-trasformabile se vale che

(1) $\mathrm{supp}(f) \subset [0, +\infty)$

(2) $\exists \lambda \in \mathbb{R}: \quad e^{-\lambda t} f(t) \in L^1(\mathbb{R}^+)$

In questo caso (quindi se $\exists \lambda \dots$) definiamo ascissa di convergenza il valore

$$\lambda_f = \inf \{ \lambda \in \mathbb{R} : e^{-\lambda t} f(t) \in L^1(\mathbb{R}) \}$$

Se per una $f(t)$ non vale la (1) si può risolvere considerando $H(t) \cdot f(t)$ anziché la sola $f(t)$, dove

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad \text{funzione di Heaviside}$$

Data $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $\mathcal{L}$-trasformabile, definiamo trasformata di Laplace di $f$ la funzione

$$\mathcal{L}(f)(s) = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

$$F(s): \forall s \in \mathbb{C}: \mathrm{Re}(s) > \lambda_f \to \mathbb{C}$$

Oss:

(O1) $f$ $\mathcal{L}$-trasformabile $\Rightarrow$ $f \in L^1_{loc}((0,+\infty))$

(O2) Il calcolo di $\lambda_f$ è equivalente formalmente a quello della trasformata $F(s)$. Perché:

- per $\lambda_f$ calcolo $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t)\, dt$ e vedo per quale $\lambda$ minimo c'è convergenza.
- per $F(s)$ calcolo $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$

quindi prendo la primitiva calcolata prima e al posto dei $\lambda$ metto le $s$.

Proprietà della trasformata:

- linearità:

$$\mathcal{L}(\alpha u + \beta v)(s) = \alpha U(s) + \beta V(s) \quad \forall s \in \mathbb{C}: \mathrm{Re}(s) > \max(\lambda_u, \lambda_v)$$

- scaling: $\mathcal{L}(u(at))(s) = \frac{1}{a} \mathcal{L}(u)\left(\frac{s}{a}\right)$ $\quad \mathrm{Re}(s) > a\lambda_u$, $a \in \mathbb{R}$

- ritardo: $\mathcal{L}(u(t-a))(s) = e^{-as} \mathcal{L}(u)(s)$ $\quad a \geq 0$, $a \in \mathbb{R}$

- sfasamento: $\mathcal{L}(e^{\alpha t} u(t))(s) = \mathcal{L}(u)(s-\alpha)$ $\quad \mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(\alpha) + \lambda_u$, $\alpha \in \mathbb{C}$

- derivata della trasformata:

$$\mathcal{L}(u(t))' = -\mathcal{L}(t\,u(t))$$

$$\mathcal{L}(u(t))^{(n)} = (-1)^n \mathcal{L}(t^n u(t))$$

la trasformata è olomorfa sul semipiano di convergenza $\mathcal{L}(u) \in H(\underbrace{\mathrm{Re}(s) > \lambda_u}_{\text{o anche } \max(\lambda_u, \lambda_{t \cdot u(t)})})$

- trasformata della derivata:

$u \in C^1(0,+\infty)$, $u'$ è $\mathcal{L}$-trasf. $\Rightarrow$ $\mathcal{L}(u')(s) = sU(s) - u(0^+)$

$u \in C^2(0,+\infty)$, $u''$ è $\mathcal{L}$-trasf. $\Rightarrow$ $\mathcal{L}(u'')(s) = s^2U(s) - su(0^+) - u'(0^+)$

si può estendere per $u \in C^n(0,+\infty)$, $u^{(n)}$ $\mathcal{L}$-trasf.

- integrali:

se $u$ è $\mathcal{L}$-trasf. allora anche la sua primitiva è $\mathcal{L}$-trasf. e vale

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t u(\tau)\,d\tau\right)(s) = \frac{1}{s}U(s)$$

se $\frac{u(t)}{t}$ è $\mathcal{L}$-trasf. allora anche $u$ è $\mathcal{L}$-trasf. e vale

$$\mathcal{L}\left(\frac{u(t)}{t}\right)(s) = \int_s^{+\infty} U(\sigma)\,d\sigma$$

- limite (comportamento a $+\infty$ della trasformata):

$u$ $\mathcal{L}$-trasf. $\Rightarrow$ $\lim_{Re(s)\to+\infty} U(s) = 0$

- convoluzione: se $f$ e $g$ sono $\mathcal{L}$-trasf. allora
  - si definisce
$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau$$
  - la funzione $(f*g)$ è $\mathcal{L}$-trasf. e vale che
$$\mathcal{L}(f*g)(s) = F(s)\cdot G(s) \qquad \forall s\in\mathbb{C}: Re(s) > \max(\lambda_f, \lambda_g)$$

Teo (valori iniziali e finali). Sia $u \in C^1([0,+\infty))$ $\mathcal{L}$-trasf. e anche $H(t)\cdot u'(t)$ sia $\mathcal{L}$-trasf. valgono le due formule:

- del valore iniziale

$$u(0^+) = \lim_{Re(s)\to+\infty} sU(s)$$

- del valore finale

$$\underbrace{u(+\infty)}_{u(t)|_{t\to+\infty}} = \lim_{\substack{s\to 0\\ Re(s)>0}} sU(s)$$

(se vale in più che $H(t)\cdot u'(t) \in L^1(\mathbb{R})$)

Teo (inversione). Sia $r_0 \in \mathbb{R}$, $U \in H(\mathbb{C}\setminus\{Re(s) > r_0\})$. Supponiamo che $\forall r > r_0$ $\exists\, \alpha > 1, c > 0$:

$$|U(s)| \leq \frac{c}{1+|s|^\alpha} \qquad \forall Re(s) > r$$

allora $\Rightarrow$ $\exists!\, u : \mathcal{L}(u) = U$

per esempio occorre controllare che gr(den) > gr(num), cioè che DEN $\to +\infty$ più velocemente del NUM, per $s \to +\infty$

E vale il calcolo:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{st}\,U(s)\,ds \quad , \quad \gamma = \gamma(t) = \{x + it\}$$

In realtà per antitrasformare conviene usare il metodo di Heaviside: scompone la trasformata in fratti semplici (o comunque parti che sappiamo già antitrasformare) e antitrasformiamo quelli.

TRASFORMATE DI LAPLACE FAMOSE

$$\mathcal{L}(\delta) = 1$$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}(H(t)) &= \frac{1}{s} \\ \mathcal{L}(t\,H(t)) &= \frac{1}{s^2} \\ \mathcal{L}(t^2 H(t)) &= \frac{2}{s^3} \end{aligned}\right\} \quad \mathcal{L}(t^n H(t)) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}(\operatorname{sen}(\omega t)) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \qquad \mathcal{L}(\cos(\omega t)) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}(\operatorname{sh}(\omega t)) = \frac{\omega}{s^2-\omega^2} \qquad \mathcal{L}(\operatorname{ch}(\omega t)) = \frac{s}{s^2-\omega^2}$$

in queste ultime è stato sottinteso il moltiplicare per $H(t)$, ma comunque va sempre messo